Задача 1. Пять спортсменов

Решение:

1. Необходимо построить и заполнить таблицу истинности.

2. Рассмотрим первое высказывание: «В домах с четными номерами проживают те спортсмены, для которых коньки являются обязательным атрибутом их вида спорта; у одного из них рюкзак чёрного цвета». Это означает, что хоккеист, фигурист и обладатель чёрного рюкзака не проживают в домах под номерами 1, 3, 5. В таблице для фигуриста и хоккеиста в этих строках необходимо поставить прочерк («-»). Аналогичным образом поступаем с рюкзаком чёрного цвета.

	биатлонист (B)	хоккеист (H)	фигурист (F)	сноубордист (S)	бобслеист (D)
1		-	-		
2					
3		-	-		
4					
5		-	-		

черный (C)	красный (R)	желтый (Y)	зеленый (G)	белый (W)
-				
-				
-				

черный (C)					
красный (R)					
желтый (Y)					
зеленый (G)					
белый (W)					

3. Из второго высказывания («Рядом с последним домиком стоят сани») можно сделать вывод о том, что в домике 5 проживает бобслеист. Поставьте плюс («+») на соответствующем пересечении. На пересечении бобслеиста и остальных домиков необходимо поставить прочерк («-»), аналогично поступаем с остальными спортсменами и домиком 5.

	биатлонист (B)	хоккеист (H)	фигурист (F)	сноубордист (S)	бобслеист (D)
1		-	-		-
2					-
3		-	-		-
4					-
5	-	-	-	-	+

черный (C)	красный (R)	желтый (Y)	зеленый (G)	белый (W)
-				
-				
-				

черный (C)					
красный (R)					
желтый (Y)					
зеленый (G)					
белый (W)					

4. Из третьего и четвёртого высказываний («В 1 и 2 домах проживают владелец лыж с винтовкой и владелец жёлтого рюкзака»; «В 1 и 3 домах живут биатлонист и обладатель белого рюкзака»)

можно сделать вывод, что обладатель винтовки - это биатлонист, и рюкзак у него ни желтого, ни белого цветов. В таблице на пересечении домика 1 и биатлониста поставьте плюс («+»), а на пересечении с остальными домами — прочерк («-»). На пересечении биатлониста с рюкзаками желтого и белого цветов также поставьте прочерки («-»). Так как в домике 1 живет биатлонист, значит, хозяин желтого рюкзака проживает в домике 2. Следовательно, на пересечении домика 2 и желтого рюкзака поставьте плюс («+»), на пересечении остальных домиков — прочерк («-»). Аналогичные операции проделать с домиком 3 и рюкзаком белого цвета.

	биатлонист (B)	хоккеист (H)	фигурист (F)	сноубордист (S)	бобслеист (D)
1	+	-	-	-	-
2	-				-
3	-	-	-		-
4	-				-
5	-	-	-	-	+

черный (C)	красный (R)	желтый (Y)	зеленый (G)	белый (W)
-		-		-
-	-	+	-	-
-	-	-	-	+
		-		-
-		-		-

черный (C)					
красный (R)					
желтый (Y)	-				
зеленый (G)					
белый (W)	-				

5. Из четвёртого высказывания («В 4 и 5 домах проживают фигурист и хозяин красного рюкзака») можно сделать вывод о том, что фигурист живет в домике 4, поставьте плюс («+») на соответствующем пересечении. На пересечении красного рюкзака и домика 5 тоже поставьте плюс («+»).

	биатлонист (B)	хоккеист (H)	фигурист (F)	сноубордист (S)	бобслеист (D)
1	+	-	-	-	-
2	-		-		-
3	-	-	-		-
4	-	-	+	-	-
5	-	-	-	-	+

черный (C)	красный (R)	желтый (Y)	зеленый (G)	белый (W)
-	-	-		-
-	-	+	-	-
-	-	-	-	+
	-	-		-
-	+	-	-	-

черный (C)					
красный (R)					
желтый (Y)	-				
зеленый (G)					
белый (W)	-				

6. Теперь необходимо заполнить пропуски в таблице. Получается: хоккеист живет в домике 2, сноубордист живет в домике 3, в домике 1 живет хозяин зеленого рюкзака, а хозяин чёрного рюкзака проживает в домике 4. В итоге получаем:

	биатлонист (B)	хоккеист (H)	фигурист (F)	сноубордист (S)	бобслеист (D)
1	+	-	-	-	-
2	-	+	-	-	-
3	-	-	-	+	-
4	-	-	+	-	-
5	-	-	-	-	+

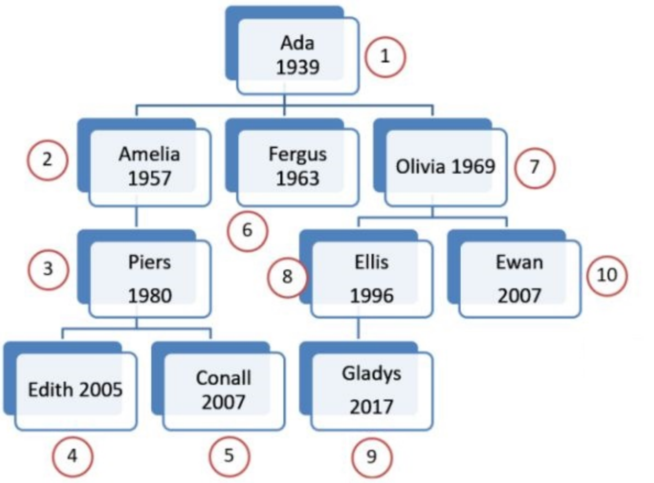
черный (C)	красный (R)	желтый (Y)	зеленый (G)	белый (W)
-	-	-	+	-
-	-	+	-	-
-	-	-	-	+
+	-	-	-	-
-	+	-	-	-

черный (C)	-	-	+	-	-
красный (R)	-	-	-	-	+
желтый (Y)	-	+	-	-	-
зеленый (G)	+	-	-	-	-
белый (W)	-	-	-	+	-

(a) В первом домике живет биатлонист, и у него рюкзак зеленого цвета.
(b) Во втором домике живет хоккеист, и у него рюкзак желтого цвета.
(c) В третьем домике живет сноубордист, и у него рюкзак белого цвета.
(d) В четвёртом домике живет фигурист, и у него рюкзак чёрного цвета.
(e) В пятом домике живет бобслеист, и у него рюкзак красного цвета.

Задача 2. Престолонаследование

Для решения этой задачи составим генеалогическое дерево и совершим его прямой обход.



Piers 3
Amelia 2
Conall 5
Ada 1
Ewan 10
Fergus 6
Gladys 9
Olivia 7
Edith 4
Ellis 8

Задача 3. Скрепка

Скрепка состоит из трёх горизонтальных линий длины w и четырёх вертикальных линий разной длины (h, $h-2$, $h-1$ и $h-1$). После упрощения получается следующее выражение:

$3 \times w + 4 \times h - 4$

Задача 4. Зеркальный лабиринт

Нарисуем путь луча в лабиринте без изменений и здесь же обозначим путь луча, запущенного из детектора в лабиринт. Выберем те зеркала, на которые с одной стороны попадает луч из лазера, а с другой — луч из детектора. При этом следует быть внимательными и выбирать только такие зеркала, на которые вектор луча из лазера и вектор луча из детектора попадают под прямым углом (это клетки (1 8), (2 4), (3 7), (5 7), (7 8) и (8 7)), и исключить такие клетки, на которые эти вектора попадают под углом 180 градусов (такие как (3 5), (4 2) и (6 3).

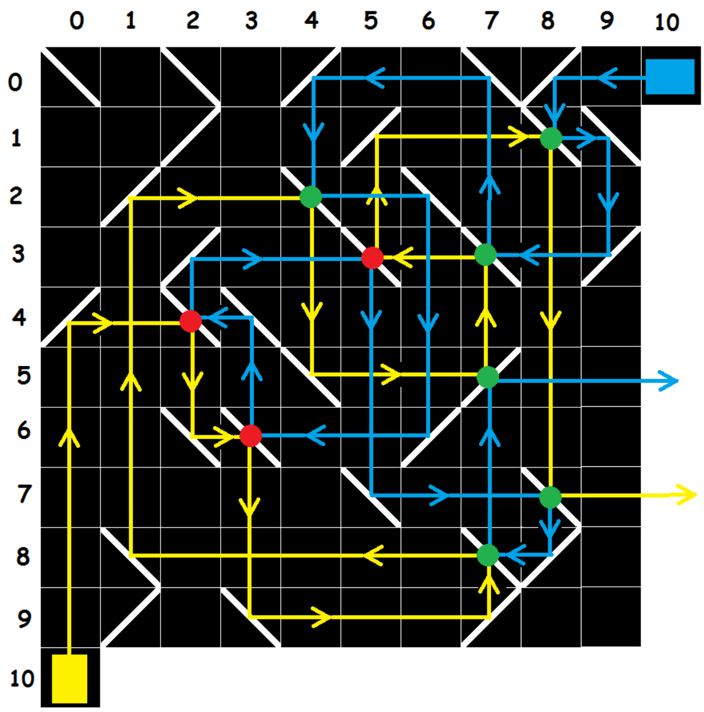


Рис. 5

На рис. 5 приведены оба луча. Зеленым обозначены искомые клетки, где вектора лучей пересекаются под прямым углом. Красным отмечены клетки, где вектора лучей встречаются под углом 180 градусов, эти клетки не являются ответом. Таким образом, правильный ответ включает в себя шесть клеток:

1 8
2 4
3 7
5 7
7 8
8 7

Задача 5. Треугольник из палочек

Напомним, что треугольник существует, если выполняется так называемое неравенство треугольника. Оно утверждает, что длина любой стороны треугольника всегда меньше суммы длин двух его других сторон.

Рассмотрим частный случай $a = b = c$. Очевидно, что в этом случае после каждой операции треугольник будет оставаться равносторонним (и, соответственно, существовать), пока все стороны не станут нулевой длины. Это произойдет после a операций.

Рассмотрим частный случай $a, b, c \leqslant 10^5$. Смоделируем описанный в условии процесс: будем уменьшать стороны на 1, пока выполняется неравенство треугольника.

```
a = int(input())
b = int(input())
c = int(input())
ans = 0
while a + b > c and a + c > b and b + c > a:
    a, b, c = a - 1, b - 1, c - 1
    ans += 1
print(ans)
```

Полное решение. Упорядочим a, b, c по возрастанию, тогда неравенство треугольника можно будет записать так: $c \leqslant a + b$.

Само упорядочивание удастся осуществить следующим образом: наименьшее и наибольшее из трёх данных чисел можно выразить через стандартные операции минимума и максимума. Среднее же из чисел получится найти, если из суммы трёх исходных чисел вычесть найденные значения наибольшего и наименьшего.

Спустя x операций это неравенство нарушится и превратится в равенство $= a + b$ (так как c уменьшается на 1, а $a + b$ на 2, то мы не «перескочим» равенство). Составим и решим уравнение:

$c - x = a + b - 2 \times x$

Отсюда $x = a + b - c$

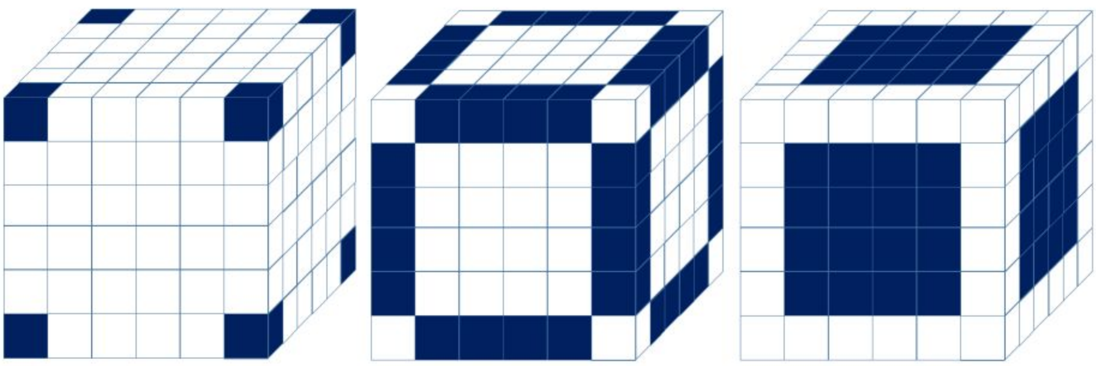
```
a = int(input())
b = int(input())
c = int(input())
a, b, c = min(a, b, c), a + b + c - min(a, b, c) - max(a, b, c), max(a, b, c)
ans = a + b - c
print(ans)
```

Задача 6. Раскрашенный куб

Самый простой случай – последний, при $f = 3$. Три грани окажутся окрашенными только у тех кубиков, которые расположены в углах исходного куба, их всегда 8.

При $f = 2$ две грани окажутся окрашенными только у тех кубиков, которые расположены на рёбрах исходного куба, на каждом ребре их будет по $n - 2$, всего рёбер у куба 12.

При $f = 1$ одна грань окажется окрашенной только у тех кубиков, которые расположены внутри каждой грани исходного куба, на каждой грани их будет по $(n - 2) \times (n - 2)$, всего граней у куба 6.



f = 3　　f = 2　　f = 1

Наконец, при $f = 0$ нужно найти количество не окрашенных ни с одной из сторон кубиков. Можно из общего числа кубиков вычесть все рассмотренные в предыдущих случаях кубики:

$n^3 - 8 - 12 \times (n-2) - 6 \times (n-2) \times (n-2)$,

или сообразить, что все они образуют куб со стороной на 2 меньше, чем исходный куб, то есть $(n-2)^3$.

```
n = int(input())
f = int(input())
if f == 0:
    ans = (n - 2) ** 3
if f == 1:
    ans = 6 * (n - 2) ** 2
if f == 2:
    ans = 12 * (n - 2)
if f == 3:
    ans = 8
print(ans)
```

Задача 7. Антон и арбузы

Частичное решение

Промоделируем в явном виде процесс, описанный в условии. На каждом из d шагов добавим по единице ко всем затронутым ячейкам массива, а затем найдём в нём максимум и посчитаем количество максимумов по всему массиву.

```
n = int(input())
m = int(input())
d = int(input())

A = [[0] * m for _ in range(n)]

for i in range(d):
    x_i = int(input())
    y_i = int(input())
    for x in range(x_i):
        for y in range(y_i):
            A[x][y] += 1

ans = 0
for i in range(n):
    ans = max(ans, max(A[i]))

count = 0
for i in range(n):
    count += A[i].count(ans)

print(count, ans)
```

Сложность такого алгоритма составляет $O(nmd)$ по времени и $O(nm)$ по памяти, то есть работает он очень долго, да и хранить массив $n \times m$ мы не всегда можем, поэтому такое решение наберёт только 50 баллов.

Полное решение

Заметим, что на каждом шаге Антон поливает хотя бы одну строку и столбец. Следовательно, арбуз, лежащий в ячейке $(1, 1)$, будет полит ровно d раз, и это максимум, который является ответом на второй вопрос. Осталось понять, сколько ещё ячеек будут политы каждый день. Несложно видеть, что d раз будут политы в точности $\min x_i$ строк и $\min y_i$ столбцов, то есть их произведение и является ответом на первый вопрос.

```
n = int(input())
m = int(input())
d = int(input())

for i in range(d):
    x_i = int(input())
    y_i = int(input())
    n = min(n, x_i)
    m = min(m, y_i)
print(n * m, d)
```

Сложность такого алгоритма $O(d)$, а дополнительную память мы вообще не используем.