Районный тур 2016. 10 класс. Решения.

Задача 1. I вариант.

Сначала определим, какое количество теплоты Q было передано льду горелкой за 100 секунд. За небольшой интервал времени Δt горелка передает льду количество теплоты $\Delta Q = P\Delta t$. Разбивая весь промежуток времени в 100 секунд на множество небольших интервалов и выполняя суммирование, получаем, что полное количество теплоты, переданное льду, равно площади под графиком $P(t)$. Таким образом, имеем:

$$Q = 0,3\ \text{кВт} \cdot 25\ \text{с} + \frac{1}{2} \cdot (\ 0,3\ \text{кВт} + 0,5\ \text{кВт}\ ) \cdot 40\ \text{с} + 0,5\ \text{кВт} \cdot 35\ \text{с} = 41\ \text{кДж}.$$

Найдем, какое количество теплоты Q_0 необходимо, чтобы расплавить $m = 400$ г льда (λ – удельная теплота плавления льда):

$$Q_0 = m\lambda = 400\ \text{г} \cdot 333\ \text{Дж/г} \approx 133\ \text{кДж}.$$

Из неравенства $Q < Q_0$ следует, что не весь лед превратился в воду.

Найдем массу расплавившегося в сосуде 1 льда (и, соответственно, массу воды, поступившей в сосуд 2 при температуре 0°C):

$$m_{\text{в}} = \frac{Q}{\lambda} = \frac{41\ \text{кДж}}{333\ \text{Дж/г}} \approx 123\ \text{г}$$

Для нахождения конечной температуры τ воды в сосуде 2 после установления теплового равновесия, запишем уравнение теплового баланса. Для этого приравняем теплоту, полученную водой при нагревании от 0°C до температуры τ, теплоте, отданной шариком воде при остывании от некоторой начальной температуры $\tau_{\text{шар}}$ до температуры τ:

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}} (\tau - 0°\text{C}) = c_{\text{ал}} m_{\text{шар}} (\tau_{\text{шар}} - \tau).$$

Температура шарика по условию не дана, однако сказано, что шарик был нагрет в руках. Это позволяет оценить температуру шарика, т.е., например, считать $\tau_{\text{шар}} = 36,6°\text{C}$.

Если $\tau_{\text{шар}}$ известна, из последнего уравнения легко выразить конечную температуру системы (в градусах Цельсия):

$$\tau = \frac{c_{\text{ал}} m_{\text{шар}}}{c_{\text{в}} m_{\text{в}} + c_{\text{ал}} m_{\text{шар}}} \cdot \tau_{\text{шар}} = \frac{c_{\text{ал}} m_{\text{шар}}}{c_{\text{в}} Q/\lambda + c_{\text{ал}} m_{\text{шар}}} \cdot \tau_{\text{шар}} \approx 0.0817\, \tau_{\text{шар}} \tag{1}$$

При выбранном нами значении $\tau_{\text{шар}}$ это даёт ответ $\tau \approx 3°\text{C}$.

Замечание. Разумеется, температура ладоней человека не обязательно равна 36,6°C. Однако из-за полученного малого коэффициента пропорциональности между τ и $\tau_{\text{шар}}$ в формуле (1), изменение $\tau_{\text{шар}}$ в разумных пределах не приводит к заметному изменению ответа на вопрос задачи.

Ответ: Конечная температура воды в сосуде 2 составит около 3°C.

Задача 2. I вариант.

Чтобы определить максимальную высоту подъема санок, необходимо найти их скорость в точке B. Проще всего найти её, используя закон сохранения энергии.

Будем отсчитывать высоту и потенциальную энергию от уровня точки B. В начальный момент санки обладают потенциальной энергией $mgL\sin\alpha$ (где m – масса санок, $L\sin\alpha$ – высота точки A над нулевым уровнем потенциальной энергии). На участке AB на санки действует непотенциальная сила – сила трения, значит, часть механической энергии преобразуется в теплоту Q за счёт работы этой силы. В точке B вся механическая энергия системы сосредоточена в кинетической энергии санок, поэтому по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgL\sin\alpha - Q. \tag{2}$$

Вычислив работу силы трения $A_{\text{трения}}$ при движении санок по горке, мы одновременно найдём и выделившееся тепло, $Q = |A_{\text{трения}}|$. Сила трения при движении санок не постоянна; *она линейно уменьшается* с расстоянием — от своего максимального значения $F_{\max} = 0,5mg\cos\alpha$ до нуля. Поэтому при вычислении работы следует разбить все перемещение санок на маленькие отрезки длиной Δx, так чтобы на каждом из них сила практически не менялась. Затем найдём работу на каждом отрезке и просуммируем результат для всех отрезков. Теплота, выделившаяся на самом начальном отрезке, где сила трения максимальна, будет, очевидно, равна $\Delta Q_{\max} = F_{\max}\Delta x$; на последующих отрезках теплота будет *линейно убывать с расстоянием* — вплоть до нуля внизу горки. На отрезке ровно посередине горки выделится теплота $\Delta Q_{\text{ср}} = (F_{\max}/2)\Delta x$. Все остальные слагаемые ΔQ на каждом отрезке могут быть больше или меньше $\Delta Q_{\text{ср}}$, однако для любого отрезка выше середины горки, где сила трения больше $F_{\max}/2$ на некоторую величину, существует симметрично расположенный отрезок ниже середины, где сила трения меньше $F_{\max}/2$ на эту же самую величину. Поэтому для расчета работы силы трения можно использовать среднее значение силы $F_{\max}/2$. Таким образом, работа силы трения на участке AB будет равна по модулю

$$|A_{\text{трения}}| = \frac{LF_{\max}}{2} = \frac{Lmg\cos\alpha}{4},$$

так что из (2) легко получить

$$\frac{mv^2}{2} = mgL\sin\alpha - \frac{Lmg\cos\alpha}{4} = \frac{mgL(4\sin\alpha - \cos\alpha)}{4}. \tag{3}$$

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то в полете механическая энергия санок сохраняется и равна $mv^2/2$. Это позволяет легко найти максимальную высоту подъёма санок. Действительно, в высшей точке подъема скорость санок горизонтальна и равна $v\cos 60°$. Поэтому их кинетическая энергия равна $(mv^2\cos^2 60°)/2$. Если $h_{\max}$ — высота санок в момент максимального подъёма, то потенциальная энергия в этот момент равна $mgh_{\max}$, и закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2\cos^2 60°}{2} + mgh_{\max} \quad \Rightarrow \quad mgh_{\max} = \frac{mv^2(1-\cos^2 60°)}{2} = \frac{mv^2\sin^2 60°}{2}.$$

Подставляя сюда значение $mv^2/2$ из (3), и выражая $h_{\max}$, найдём окончательный ответ

$$mgh_{\max} = \frac{mgL(4\sin\alpha - \cos\alpha)\sin^2 60°}{4} \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = \frac{L(4\sin\alpha - \cos\alpha)\sin^2 60°}{4}.$$

Подставляя численные значения, получим $h_{\max} = 10.6$ м.

Ответ: Максимальная высота подъёма санок равна 10.6 м.

Задача 3. I вариант.

Для начала представим, что спицы колеса не ломаются. В этом случае, в предположении, что колесо вращается равномерно, зависимость полного спorотивления от времени $R(t)$ будет периодической функцией.

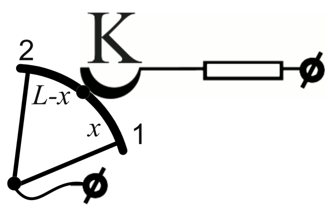


Рис. 1: Контакт К и две спицы

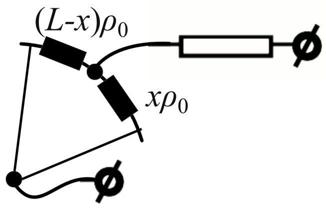


Рис. 2: Эквивалентная схема

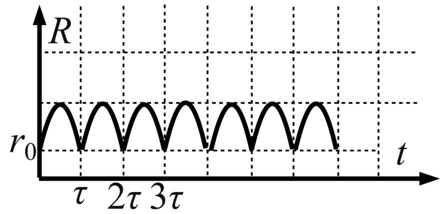


Рис. 3: Когда спицы не ломаются

Рассмотрим движение колеса на интервале от начального положения до момента, когда контакт коснётся основания второй спицы. Взаимное расположение контакта, первой и второй спицы показано на рисунке 1. Введём $\rho_0 = R_0/L$ – сопротивление единицы длины обода. Обозначим за L длину дуги обода между основаниями соседних спиц, а за x – длину дуги между контактом К и основанием спицы 1 (см. рис. 1). Тогда между К и основанием второй спицы лежит дуга $L - x$. Сопротивление этих дуг равно, соответственно, $x\rho_0$ и $(L-x)\rho_0$ (см. рис. 2). Поскольку сопротивлением спиц можно пренебречь, эквивалентная схема (рис. 2) состоит из параллельно подключенных друг к другу дуг обода длиной x и $L - x$, к которым последовательно подключено сопротивление r_0. Остальные участки обода не вносят вклад в общее сопротивление (они обоими концами замкнуты на контакте источника, поэтому ток через них не течет). Сопротивление проводов на рис. 2 мало. Общее сопротивление эквивалентной схемы

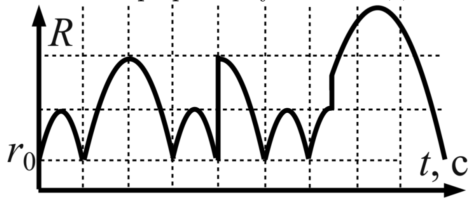
$$R(x) = r_0 + \frac{x\rho_0(L-x)\rho_0}{x\rho_0 + (L-x)\rho_0} = r_0 + \frac{x(L-x)\rho_0}{L}. \tag{4}$$

Видно, что зависимость $R(x)$ представляет из себя параболу с ветвями вниз и вершиной в точке $x = L/2$, причем при $x = 0$ и $x = L$ второе слагаемое в (4) обращается в ноль, и сопротивление при этих значениях будет равно r_0. При равномерном вращении колеса величина x пропорционально времени, так что график зависимости полного сопротивления $R(t)$ также будет иметь такой же вид. Таким образом, если бы спицы не ломались, то график полного сопротивления в случае равномерного вращения выглядел бы как периодически повторяющийся кусок параболы (см. рис. 3). При неравномерном вращении колеса определенные участки графика $R(t)$ будут сжиматься или растягиваться, но его характер – возрастание со значения r_0 до максимума и убывание снова до r_0, — останется тем же.

Если же контакт находится рядом со сломанной спицей, в эквивалентной схеме (рис. 2) будут "работать" ближайшие к контакту К целые спицы. Например, если сломана одна спица, и контакт проходит этот участок, в формуле (4) нужно заменить L на $2L$. Это будет соответствовать графику в виде большей параболы с вершиной при $x = L$. Если сломаны две спицы подряд, в формуле (4) нужно заменить L на $3L$, и парабола станет в 3 раза шире и выше.

Используя изложенные выше наблюдения, можно непосредственно перейти к ответу на вопрос задачи. Первая парабола на графике рис. 4 соответствует повороту на 60° при наличии 1-ой и 2-ой спиц. Затем возникает большая парабола (ее "высота" и "ширина" в 2 раза больше), что означает, что спица 3 сломана (она могла сломаться в любой момент при повороте колеса от 0° до 60°), а 2ая и 4ая целы. После этого мы видим опять маленькую параболу, которая соответствует движению контакта К между спицами 4 и 5 (спицы 4 и 5 целы). Идущий затем скачок означает, что спица 5 ломается как раз в тот момент, когда она встречается с контактом К. Спица 6 при этом остается целой (ширина параболы соответствует только одной сломанной спице на этом участке). Затем вновь идет участок с маленькой параболой (движение между 6-

Рис. 4: График из условия задачи



ой и 1-ой спицами, так что обе эти спицы целы). При движении по следующей малой параболе – между спицами 1 и 2 – график снова испытывает скачок в районе вершины, при этом после скачка сопротивление продолжает увеличиваться. Это означает, что в момент скачка ломается спица 2. При этом по графику видно, что парабола имеет ширину в 3 периода, то есть после первой спицы идёт сразу две сломанные, что соответствует движению контакта между спицами 1 и 4 в отсутствие спиц 2 и 3. Таким образом, сначала ломается спица 3, потом спица 5, а затем спица 2.

Замечание. В принципе, после того, как участок от 6 до 1 спицы был пройден, спица 6 также могла сломаться, но это никак не отражается на приведенном в условии графике зависимости полного сопротивления от времени.

Ответ: Сначала ломается спица 3, потом спица 5, а затем спица 2.

Задача 4. I вариант.

Способ I. Этот способ решения основан на простой идее о том, что если движение твёрдого тела не является поступательным, то в любой момент времени можно представить это движение как вращение вокруг некоторой точки – мгновенного центра вращения (МЦВ). Прежде чем использовать эту идею, проиллюстрируем её.

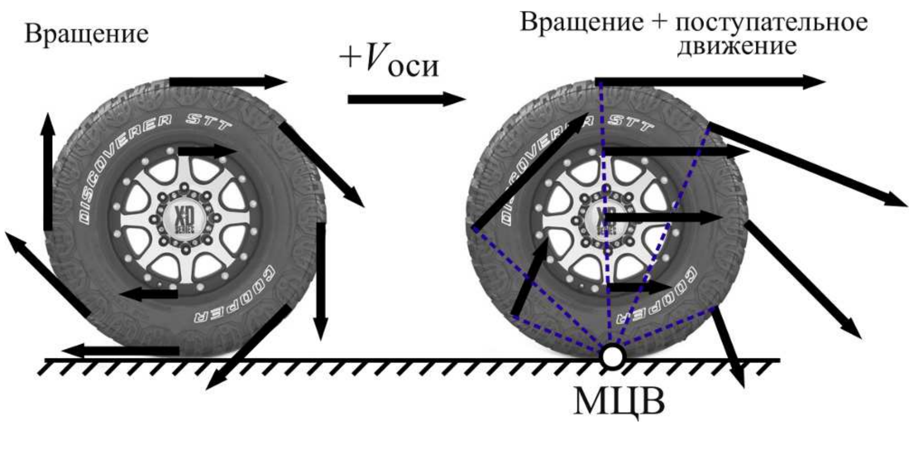


Рис. 5: Скорости точек колеса при вращательном движении (слева) и при качении колеса (справа)

Рассмотрим колесо, которое катится без проскальзывания по дороге. Его движение в неподвижной системе отсчёта представляет собой сумму вращательного движения точек колеса вокруг оси и поступательного движения оси вдоль дороги. На рисунке 5 показано, как векторным сложением вращательной и поступательной скоростей получить мгновенную скорость любой точки колеса при таком составном движении. Можно заметить, что в любой момент времени вращательно-поступательное движение колеса можно представить как вращение вокруг мгновенной оси — точки колеса, которая в данный момент неподвижна. Несложно понять, что такой точкой в каждый момент является точка соприкосновения колеса с дорогой. При этом мгновенная скорость любой точки перпендикулярна линии, соединяющей эту точку с МЦВ, а величина скорости тем больше, чем дальше точка удалена от МЦВ (при этом зависимость скорости от расстояния линейная, поскольку все точки вращаются вокруг МЦВ с одинаковой угловой скоростью).

Вернёмся теперь к нашей задаче и попытаемся определить МЦВ стержня CD. Найти МЦВ можно, зная направления скоростей двух точек тела и восстановив к ним перпендикуляры. В нашей задаче известно направление скорости точки D — вдоль желоба. Кроме того понятно, что точка B совершает вращение вокруг неподвижной точки A, а значит её скорость в рассматриваемый момент вертикальна.

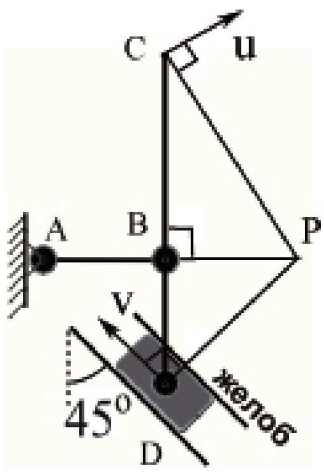


Рис. 6:

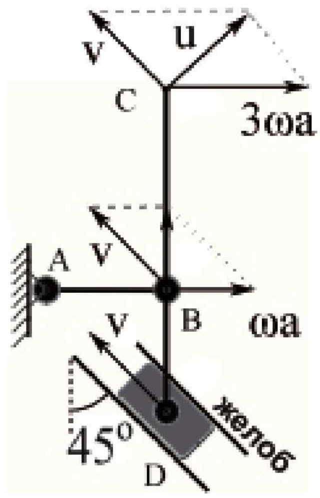


Рис. 7:

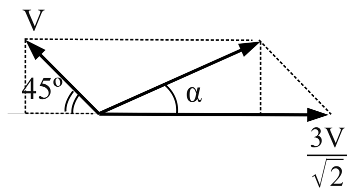


Рис. 8:

Рассмотрим случай, когда скорость точки D направлена вверх по желобу (см. рис. 6). Проведем перпендикуляры к скоростям точек B и D, их пересечение и будет МЦВ (точка P). Чтобы определить направление скорости точки C, проведем отрезок из точки P в точку C. Скорость точки C будет перпендикулярна PC. Для величины этой скорости можно написать пропорцию

$$\frac{V_C}{|PC|} = \frac{V_D}{|PD|} \qquad \Rightarrow \qquad V_C = V_D \frac{|PC|}{|PD|}$$

Из рисунка видно, что $|PD| = a\sqrt{2}$, $|PC| = a\sqrt{5}$. Значит, скорость точки C по величине равна $V_C = u = v\sqrt{5/2}$.

В случае, когда ползунок движется в противоположном направлении, ход решения и ответ остаются прежним, но скорость точки C меняет направление на противоположное.

Способ II. Рассмотрим движение механизма в подвижной системе отсчёта, связанной с точкой D. В этой системе в рассматриваемый момент времени стержень CD поворачивается относительно точки D с некоторой угловой скоростью ω. Зная расстояния $|BD| = a$ и $|CD| = 3a$, через ω можно выразить скорости точек B и C:

$$V_B = \omega a, \qquad V_C = 3\omega a.$$

Вернемся в исходную неподвижную систему отсчета, в которой точка D движется вдоль желоба со скоростью v. Для этого необходимо к скоростям всех точек стержня, которые у них были в подвижной системе, прибавить скорость точки D, т.е. вектор $\vec{v}$. Соответствующее построение выполнено на рисунке 7.

Так как скорость точки B в неподвижной системе отсчета в рассматриваемый момент направлена вертикально, горизонтальные компоненты скоростей $\vec{v}$ и $\vec{V}_B$ при векторном сложении для точки B должны скомпенсироваться:

$$\frac{v\sqrt{2}}{2} = \omega a \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{a\sqrt{2}}.$$

Складывая теперь вектор $\vec{v}$ и вектор скорости точки C относительно подвижной системы отсчета $\vec{V}_C$ (рис. 8), получаем искомую скорость точки C в неподвижной системе отсчета $u = v\sqrt{5/2}$. Здесь принято во внимание, что $|\vec{V}_C| = 3\omega a = 3v/\sqrt{2}$.

Для угла α, под которым направлена эта скорость, несложно получить соотношение

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\,v/2}{\sqrt{2}v} = \frac{1}{2}$$

Ответ: Скорость равна по модулю $v\sqrt{5/2}$ и направлена под углом $\operatorname{arctg}(1/2)$ к направлению AB.

Задача 5. I вариант.

Разберёмся, с какой скоростью вылетит из первой пушки снаряд относительно земли. Обозначим скорость вылета снаряда из первой пушки в системе отсчёта самой пушки через v. Если бы пушка была закреплена, снаряд, вылетая из неё, имел бы вертикальную скорость $v\sin\alpha$ и горизонтальную $v\cos\alpha$. Однако, пушка расположена на гладком столе и не закреплена, поэтому она испытает отдачу, за счёт чего приобретёт горизонтальную скорость вдоль стола в сторону, противоположную выстрелу. Так как массы пушки и снаряда одинаковы, и на систему "пушка + снаряд" не действуют внешние горизонтальные силы, суммарный горизонтальный импульс системы "пушка + снаряд" останется таким же как до выстрела — нулевым. Это значит, в неподвижной системе отсчёта после выстрела пушка поедет со скоростью $(v\cos\alpha)/2$, и такую же начальную горизонтальную скорость будет иметь снаряд. Заметим, что горизонтальная скорость вылета снаряда в неподвижной системе отсчёта изменилась, однако скорость удаления снаряда от пушки по-прежнему равна $v\cos\alpha$. Отметим, что вертикальная скорость снаряда при переходе в неподвижную систему отсчёта не изменилась.

Обозначим время полёта снаряда до второй пушки через t. За это время первая пушка и снаряд будут удаляться друг от друга по горизонтали с постоянной скоростью, и в момент первого попадания снаряда окажутся друг от друга на расстоянии $L = vt\cos\alpha$.

Когда снаряд попадёт во вторую пушку, та приобретёт горизонтальную скорость, которую несложно найти по закон сохранения импульса (поскольку горизонтальные внешние силы на систему "снаряд + вторая пушка" также не действуют). Горизонтальный импульс снаряда $(mv\cos\alpha)/2$ обеспечит совместное горизонтальное движение второй пушки с попавшим в неё снарядом, то есть системе массой $2m$. Скорость этого движения будет, очевидно $(v\cos\alpha)/4$, а импульс (горизонтальный) будет равен $2m(v\cos\alpha)/4$.

Пусть вторая пушка имеет в λ раз большую начальную скорость выстрела (в своей системе отсчёта). Как мы уже выясняли, это означает, что в системе отсчёта самой пушки снаряд имеет вертикальную скорость $\lambda v\sin\alpha$ и горизонтальную $\lambda v\cos\alpha$. В неподвижной системе, связанной с землёй, горизонтальная скорость снаряда снова изменится из-за отдачи пушки. Однако, горизонтальная скорость удаления снаряда от второй пушки после второго выстрела одинакова во всех системах отсчёта и равна $\lambda v \cos\alpha$. Значит, если обозначить через u горизонтальную скорость вылета снаряда в неподвижной системе, пушка поедет в противоположную сторону со скоростью $\lambda v \cos\alpha - u$.

Закон сохранения горизонтальной составляющей импульса до и после второго выстрела будет иметь вид

$$2m(v\cos\alpha)/4 = m(\lambda v \cos\alpha - u) - mu.$$

Выражая отсюда u, получим

$$u = \frac{v(2\lambda - 1)\cos\alpha}{4}.$$

Так как при втором выстреле вертикальная компонента скорости вылета снаряда увеличилась по сравнению с первым выстрелом в λ раз, время полёта при втором выстреле также увеличится в λ раз и составит λt. Горизонтальная компонента скорости сближения снаряда и первой пушки равна $v_{\text{сближ}} = u - v(\cos\alpha)/2$. За время λt снаряд должен преодолеть, двигаясь с этой скоростью, расстояние L. Поэтому

$$L = v_{\text{сближ}}\lambda t.$$

Подставляя сюда $v_{\text{сближ}}$ и L, получим

$$vt\cos\alpha = \lambda t\left(\frac{v(2\lambda - 1)\cos\alpha}{4} - \frac{v\cos\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 = \lambda\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{4}\right).$$

Это – квадратное уравнение на λ, которое легко привести к виду $2\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, у которого имеется единственный положительный корень, равный

$$\lambda = \frac{3 + \sqrt{41}}{4}.$$

Ответ: Вторая пушка должна стрелять с в $\lambda = (3 + \sqrt{41})/4$ раза большей начальной скоростью.

Задача 1. II вариант.

Сначала определим, какое количество теплоты Q было передано льду горелкой за 100 секунд. За небольшой интервал времени Δt горелка передает льду количество теплоты $\Delta Q = P\Delta t$. Разбивая весь промежуток времени в 100 секунд на множество небольших интервалов и выполняя суммирование, получаем, что полное количество теплоты, переданное льду, равно площади под графиком $P(t)$. Таким образом, имеем:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \text{ кВт} \cdot 25 \text{ с} + 0,3 \text{ кВт} \cdot 40 \text{ с} + 0,5 \text{ кВт} \cdot 35 \text{ с} \approx 33,3 \text{ кДж}.$$

Найдем, какое количество теплоты Q_0 необходимо, чтобы расплавить $m = 400$ г льда (λ – удельная теплота плавления льда):

$$Q_0 = m\lambda = 400 \text{ г} \cdot 333 \text{ Дж/г} \approx 133 \text{ кДж}.$$

Из неравенства $Q < Q_0$ следует, что не весь лед превратился в воду.

Найдем массу расплавившегося в сосуде 1 льда (и, соответственно, массу воды, поступившей в сосуд 2 при температуре 0°C):

$$m_{\text{в}} = \frac{Q}{\lambda} = \frac{33,3 \text{ кДж}}{333 \text{ Дж/г}} = 100 \text{ г}$$

Для нахождения конечной температуры τ воды в сосуде 2 после установления теплового равновесия, запишем уравнение теплового баланса. Для этого приравняем теплоту, полученную водой при нагревании от 0°C до температуры τ, теплоте, отданной шариком воде при остывании от некоторой начальной температуры $\tau_{\text{шар}}$ до температуры τ:

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}} (\tau - 0°\text{C}) = c_{\text{ал}} m_{\text{шар}} (\tau_{\text{шар}} - \tau).$$

Температура шарика по условию не дана, однако сказано, что шарик был нагрет в руках. Это позволяет оценить температуру шарика, т.е., например, считать $\tau_{\text{шар}} = 36,6°$C.

Если $\tau_{\text{шар}}$ известна, из последнего уравнения легко выразить конечную температуру системы (в градусах Цельсия):

$$\tau = \frac{c_{\text{ал}} m_{\text{шар}}}{c_{\text{в}} m_{\text{в}} + c_{\text{ал}} m_{\text{шар}}} \cdot \tau_{\text{шар}} = \frac{c_{\text{ал}} m_{\text{шар}}}{c_{\text{в}} Q/\lambda + c_{\text{ал}} m_{\text{шар}}} \cdot \tau_{\text{шар}} \approx 0.0987\, \tau_{\text{шар}} \quad (5)$$

При выбранном нами значении $\tau_{\text{шар}}$ это даёт ответ $\tau \approx 3,6°$C.

Замечание. Разумеется, температура ладоней человека не обязательно равна 36,6°C. Однако из-за полученного малого коэффициента пропорциональности между T и $T_{\text{шар}}$ в формуле (5), изменение $\tau_{\text{шар}}$ в разумных пределах не приводит к заметному изменению ответа на вопрос задачи.

<u>Ответ</u>: Конечная температура воды в сосуде 2 составит около 3,6°C.

Задача 2.II вариант.

Чтобы определить горизонтальную дальность полета санок, необходимо найти их скорость в точке B. Проще всего найти её, используя закон сохранения энергии.

Будем отсчитывать высоту и потенциальную энергию от уровня точки B. В начальный момент санки обладают потенциальной энергией $mgL\sin\alpha$ (где m – масса санок, $L\sin\alpha$ – высота точки A над нулевым уровнем потенциальной энергии). На участке AB на санки действует непотенциальная сила – сила трения, значит, часть механической энергии преобразуется в теплоту Q за счёт работы этой силы. В точке B вся механическая энергия системы сосредоточена в кинетической энергии санок, поэтому по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgL\sin\alpha - Q. \quad (6)$$

Вычислив работу силы трения $A_{\text{трения}}$ при движении санок по горке, мы одновременно найдём и выделившееся тепло, $Q = |A_{\text{трения}}|$. Сила трения при движении санок не постоянна; *она линейно уменьшается* с расстоянием — от своего максимального значения $F_{\max} = 0,5mg\cos\alpha$ до нуля. Поэтому при вычислении работы следует разбить все перемещение санок на маленькие отрезки длиной Δx, так чтобы на каждом из них сила практически не менялась. Затем найдём работу на каждом отрезке и просуммируем результат для всех отрезков. Теплота, выделившаяся на самом начальном отрезке, где сила трения максимальна, будет, очевидно, равна $\Delta Q_{\max} = F_{\max}\Delta x$; на последующих отрезках теплота будет *линейно убывать с расстоянием* — вплоть до нуля внизу горки. На отрезке ровно посередине горки выделится теплота $\Delta Q_{\text{ср}} = (F_{\max}/2)\Delta x$. Все остальные слагаемые ΔQ на каждом отрезке могут быть больше или меньше $\Delta Q_{\text{ср}}$, однако для любого отрезка выше середины горки, где сила трения больше $F_{\max}/2$ на некоторую величину, существует симметрично расположенный отрезок ниже середины, где сила трения меньше $F_{\max}/2$ на эту же самую величину. Поэтому для расчета работы силы трения можно использовать среднее значение силы $F_{\max}/2$. Таким образом, работа силы трения на участке AB будет равна по модулю

$$|A_{\text{трения}}| = \frac{LF_{\max}}{2} = \frac{Lmg\cos\alpha}{4},$$

так что из (6) легко получить

$$\frac{mv^2}{2} = mgL\sin\alpha - \frac{Lmg\cos\alpha}{4} = \frac{mgL(4\sin\alpha - \cos\alpha)}{4}. \quad (7)$$

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то полет санок происходит только под действием силы тяжести mg, которая сообщает санкам ускорение g, направленное вертикально вниз. В точке B вертикальная скорость санок равна $v\sin 60^\circ$, а в высшей точке подъема она обращается в ноль. Значит, время подъема можно найти из условия $v\sin 60^\circ = gt_0$. Время полета над уровнем точки B – в два раза больше, $t = 2t_0 = 2v\sin 60^\circ/g$. В горизонтальном направлении силы на санки не действуют, значит их горизонтальная скорость $v\cos 60^\circ$ остается постоянной. Поэтому дальность полета санок $S = v\cos 60^\circ \cdot t$. Подставляя в это выражение время полета t и скорость v из (7), найдем окончательный ответ

$$S = v\cos 60^\circ \cdot t = \frac{2v^2\sin 60^\circ\cos 60^\circ}{g} = L(4\sin\alpha - \cos\alpha)\sin 60^\circ\cos 60^\circ$$

Подставляя численные значения, получим $S \approx 24.6$ м.
Ответ: Дальность полета санок над уровнем точки B равна 24.6 м.

Задача 3. II вариант.

Для начала представим, что спицы колеса не ломаются. В этом случае, в предположении, что колесо вращается равномерно, зависимость полного спротивления от времени $R(t)$ будет периодической функцией.

Рассмотрим движение колеса на интервале от начального положения до момента, когда контакт коснётся основания второй спицы. Взаимное расположение контакта, первой и второй спицы показано на рисунке 9. Введём $\rho_0 = R_0/L$ – сопротивление единицы длины обода. Обозначим за L длину дуги обода между основаниями соседних спиц, а за x – длину дуги между контактом K и основанием спицы 1 (см. рис. 9). Тогда между K и основанием второй спицы лежит дуга $L - x$. Сопротивление этих дуг равно, соответственно, $x\rho_0$ и $(L-x)\rho_0$ (см. рис. 10). Поскольку сопротивлением спиц можно пренебречь, эквивалентная схема (рис. 10) состоит из параллельно подключенных друг к другу дуг обода длиной x и $L - x$, к которым последовательно подключено сопротивление r_0. Остальные участки обода не вносят вклад

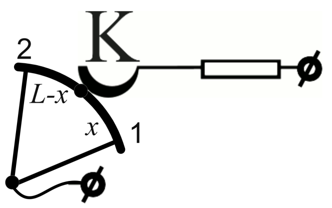


Рис. 9: Контакт К и две спицы

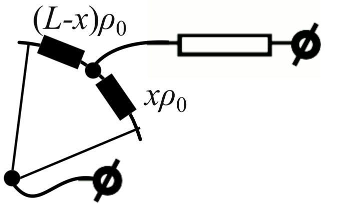


Рис. 10: Эквивалентная схема

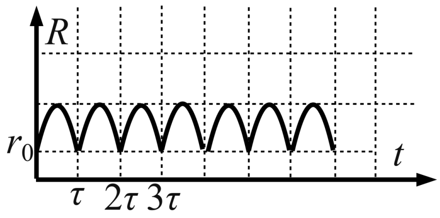


Рис. 11: Когда спицы не ломаются

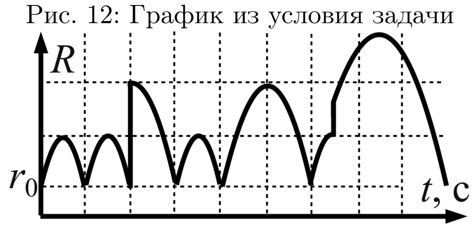
в общее сопротивление (они обоими концами замкнуты на контакте источника, поэтому ток через них не течет). Сопротивление проводов на рис. 10 мало. Общее сопротивление эквивалентной схемы

$$R(x) = r_0 + \frac{x\rho_0(L-x)\rho_0}{x\rho_0 + (L-x)\rho_0} = r_0 + \frac{x(L-x)\rho_0}{L}. \tag{8}$$

Видно, что зависимость $R(x)$ представляет из себя параболу с ветвями вниз и вершиной в точке $x = L/2$, причем при $x = 0$ и $x = L$ второе слагаемое в (8) обращается в ноль, и сопротивление при этих значениях будет равно r_0. При равномерном вращении колеса величина x пропорционально времени, так что график зависимости полного сопротивления $R(t)$ также будет иметь такой же вид. Таким образом, если бы спицы не ломались, то график полного сопротивления в случае равномерного вращения выглядел бы как периодически повторяющийся кусок параболы (см. рис. 11). При неравномерном вращении колеса определенные участки графика $R(t)$ будут сжиматься или растягиваться, но его характер – возрастание со значения r_0 до максимума и убывание снова до r_0, — останется тем же.

Если же контакт находится рядом со сломанной спицей, в эквивалентной схеме (рис. 10) будут "работать" ближайшие к контакту К целые спицы. Например, если сломана одна спица, и контакт проходит этот участок, в формуле (8) нужно заменить L на $2L$. Это будет соответствовать графику в виде большей параболы с вершиной при $x = L$. Если сломаны две спицы подряд, в формуле (8) нужно заменить L на $3L$, и парабола станет в 3 раза шире и выше.

Рис. 12: График из условия задачи



Используя изложенные выше наблюдения, можно непосредственно перейти к ответу на вопрос задачи. Первая парабола на графике рис. 12 соответствует повороту на 60° при наличии 1-ой и 2-ой спиц. После этого мы видим опять маленькую параболу, которая соответствует движению контакта К между спицами 2 и 3 (спицы 2 и 3 целы). Идущий затем скачок означает, что спица 3 ломается как раз в тот момент, когда она встречается с контактом К. Спица 4 при этом остается целой (ширина параболы соответствует только одной сломанной спице на этом участке). После этого мы видим опять маленькую параболу, которая соответствует движению контакта К между спицами 4 и 5 (спицы 4 и 5 целы). Затем возникает большая парабола (ее “высота” и “ширина” в 2 раза больше), что означает, что спица 6 сломана (она могла сломаться в любой момент при повороте колеса от 0° до 300°), а 5-ая и 1-ая целы. При движении по следующей малой параболе – между спицами 1 и 2 – график снова испытывает скачок в районе вершины, при этом после скачка сопротивление продолжает увеличиваться. Это означает, что в момент скачка ломается спица 2. При этом по графику видно, что парабола имеет ширину в 3 периода, то есть после первой спицы идёт сразу две сломанные, что соответствует движению контакта между спицами 1 и 4 в отсутствие спиц 2 и 3. Таким образом, сначала ломается спица 3, потом спица 6, а затем спица 2.

Замечание. В принципе, спица 6 могла сломаться раньше спицы 3, но информации об этом нет. Первое, что мы узнаем по графику, - это разрыв спицы 3. Поэтому в ответе указываем именно такой порядок.

<u>Ответ</u>: Сначала ломается спица 3, потом спица 6, а затем спица 2.

Задача 4. II вариант.

Способ I. Этот способ решения основан на простой идее о том, что если движение твёрдого тела не является поступательным, то в любой момент времени можно представить это движение как вращение вокруг некоторой точки – мгновенного центра вращения (МЦВ). Прежде чем использовать эту идею, проиллюстрируем её.

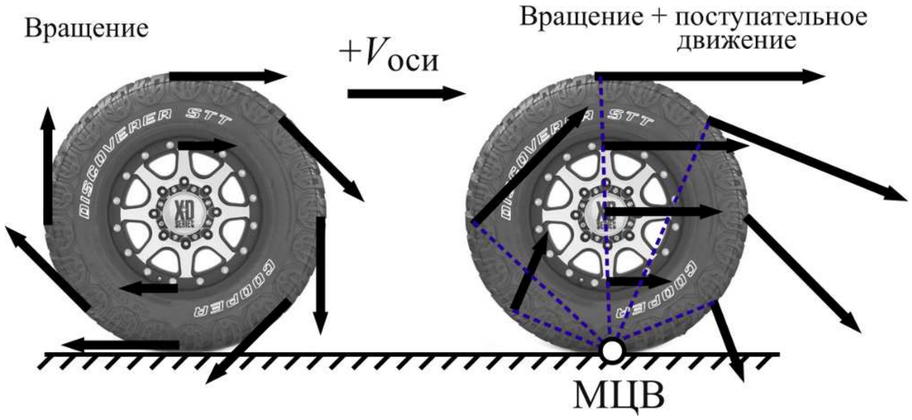


Рис. 13: Скорости точек колеса при вращательном движении (слева) и при качении колеса (справа)

Рассмотрим колесо, которое катится без проскальзывания по дороге. Его движение в неподвижной системе отсчёта представляет собой сумму вращательного движения точек колеса вокруг оси и поступательного движения оси вдоль дороги. На рисунке 13 показано, как векторным сложением вращательной и поступательной скоростей получить мгновенную скорость любой точки колеса при таком составном движении. Можно заметить, что в любой момент времени вращательно-поступательное движение колеса можно представить как вращение вокруг мгновенной оси — точки колеса, которая в данный момент неподвижна. Несложно понять, что такой точкой в каждый момент является точка соприкосновения колеса с дорогой. При этом мгновенная скорость любой точки перпендикулярна линии, соединяющей эту точку с МЦВ, а величина скорости тем больше, чем дальше точка удалена от МЦВ (при этом зависимость скорости от расстояния линейная, поскольку все точки вращаются вокруг МЦВ с одинаковой угловой скоростью).

Вернёмся теперь к нашей задаче и попытаемся определить МЦВ стержня CD. Найти МЦВ можно, зная направления скоростей двух точек тела и восстановив к ним перпендикуляры.

В нашей задаче известно направление скорости точки D — вдоль желоба. Кроме того понятно, что точка B совершает вращение вокруг неподвижной точки A, а значит её скорость в рассматриваемый момент вертикальна.

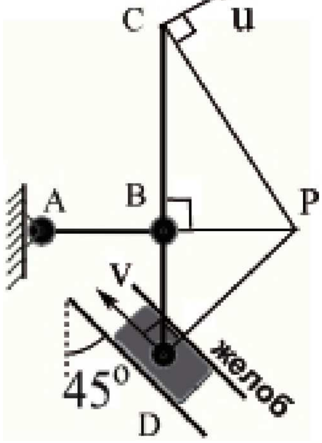


Рис. 14:

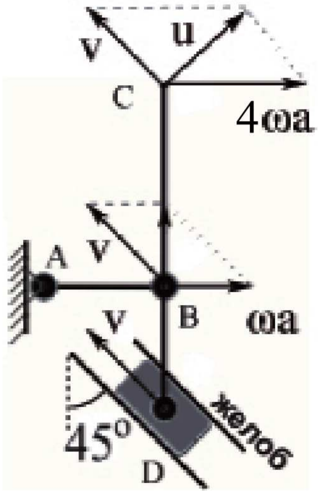


Рис. 15:

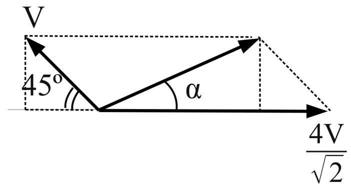


Рис. 16:

Рассмотрим случай, когда скорость точки D направлена вверх по желобу (см. рис. 14). Проведем перпендикуляры к скоростям точек B и D, их пересечение и будет МЦВ (точка P). Чтобы определить направление скорости точки C, проведем отрезок из точки P в точку C. Скорость точки C будет перпендикулярна PC. Для величины этой скорости можно написать пропорцию

$$\frac{V_C}{|PC|} = \frac{V_D}{|PD|} \qquad \Rightarrow \qquad V_C = V_D \frac{|PC|}{|PD|}$$

Из рисунка видно, что $|PD| = a\sqrt{2}$, $|PC| = a\sqrt{10}$. Значит, скорость точки C по величине равна $V_C = u = v\sqrt{5}$.

В случае, когда ползунок движется в противоположном направлении, ход решения и ответ остаются прежним, но скорость точки C меняет направление на противоположное.

Способ II. Рассмотрим движение механизма в подвижной системе отсчёта, связанной с точкой D. В этой системе в рассматриваемый момент времени стержень CD поворачивается относительно точки D с некоторой угловой скоростью ω. Зная расстояния $|BD| = a$ и $|CD| = 4a$, через ω можно выразить скорости точек B и C:

$$V_B = \omega a, \qquad V_C = 4\omega a.$$

Вернемся в исходную неподвижную систему отсчета, в которой точка D движется вдоль желоба со скоростью v. Для этого необходимо к скоростям всех точек стержня, которые у них были в подвижной системе, прибавить скорость точки D, т.е. вектор $\vec{v}$. Соответствующее построение выполнено на рисунке 15.

Так как скорость точки B в неподвижной системе отсчета в рассматриваемый момент направлена вертикально, горизонтальные компоненты скоростей $\vec{v}$ и $\vec{V}_B$ при векторном сложении для точки B должны скомпенсироваться:

$$\frac{v\sqrt{2}}{2} = \omega a \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{a\sqrt{2}}.$$

Складывая теперь вектор $\vec{v}$ и вектор скорости точки C относительно подвижной системы отсчета $\vec{V}_C$ (рис. 16), получаем искомую скорость точки C в неподвижной системе отсчета $u = v\sqrt{5}$. Здесь принято во внимание, что $|\vec{V}_C| = 4\omega a = 4v/\sqrt{2}$.

Для угла α, под которым направлена эта скорость, несложно получить соотношение

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\,v/2}{3v/\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

Ответ: Скорость равна по модулю $v\sqrt{5}$ и направлена под углом $\operatorname{arctg}(1/3)$ к направлению AB.

Задача 5. II вариант.

Разберёмся, с какой скоростью вылетит из первой пушки снаряд относительно земли. Обозначим скорость вылета снаряда из первой пушки в системе отсчёта самой пушки через v. Если бы пушка была закреплена, снаряд, вылетая из неё, имел бы вертикальную скорость $v\sin\alpha$ и горизонтальную $v\cos\alpha$. Однако, пушка расположена на гладком столе и не закреплена, поэтому она испытает отдачу, за счёт чего приобретёт горизонтальную скорость вдоль стола в сторону, противоположную выстрелу. Так как массы пушки и снаряда одинаковы, и на систему “пушка + снаряд” не действуют внешние горизонтальные силы, суммарный горизонтальный импульс системы “пушка + снаряд” останется таким же как до выстрела — нулевым. Это значит, в неподвижной системе отсчёта после выстрела пушка поедет со скоростью $(v\cos\alpha)/2$, и такую же начальную горизонтальную скорость будет иметь снаряд. Заметим, что горизонтальная скорость вылета снаряда в неподвижной системе отсчёта изменилась, однако скорость удаления снаряда от пушки по-прежнему равна $v\cos\alpha$. Отметим, что вертикальная скорость снаряда при переходе в неподвижную систему отсчёта не изменилась.

Обозначим время полёта снаряда до второй пушки через t. За это время первая пушка и снаряд будут удаляться друг от друга по горизонтали с постоянной скоростью, и в момент первого попадания снаряда окажутся друг от друга на расстоянии $L = vt\cos\alpha$.

Когда снаряд попадёт во вторую пушку, та приобретёт горизонтальную скорость, которую несложно найти по закон сохранения импульса (поскольку горизонтальные внешние силы на систему “снаряд + вторая пушка” также не действуют). Горизонтальный импульс снаряда $(mv\cos\alpha)/2$ обеспечит совместное горизонтальное движение второй пушки с попавшим в неё снарядом, то есть системе массой $2m$. Скорость этого движения будет, очевидно $(v\cos\alpha)/4$, а импульс (горизонтальный) будет равен $2m(v\cos\alpha)/4$.

Пусть вторая пушка имеет в λ раз большую начальную скорость выстрела (в своей системе отсчёта). Как мы уже выясняли, это означает, что в системе отсчёта самой пушки снаряд имеет вертикальную скорость $\lambda v\sin\alpha$ и горизонтальную $\lambda v\cos\alpha$. В неподвижной системе, связанной с землёй, горизонтальная скорость снаряда снова изменится из-за отдачи пушки. Однако, горизонтальная скорость удаления снаряда от второй пушки после второго выстрела одинакова во всех системах отсчёта и равна $\lambda v\cos\alpha$. Значит, если обозначить через u горизонтальную скорость вылета снаряда в неподвижной системе, пушка поедет в противоположную сторону со скоростью $\lambda v\cos\alpha - u$.

Закон сохранения горизонтальной составляющей импульса до и после второго выстрела будет иметь вид

$$2m(v\cos\alpha)/4 = m(\lambda v\cos\alpha - u) - mu.$$

Выражая отсюда u, получим

$$u = \frac{v(2\lambda - 1)\cos\alpha}{4}.$$

Так как при втором выстреле вертикальная компонента скорости вылета снаряда увеличилась по сравнению с первым выстрелом в λ раз, время полёта при втором выстреле также увеличится в λ раз и составит λt. Горизонтальная компонента скорости сближения снаряда и первой пушки равна $v_{\text{сближ}} = u - v(\cos\alpha)/2$. За время λt снаряд должен преодолеть, двигаясь с этой скоростью, расстояние L. Поэтому

$$L = v_{\text{сближ}}\lambda t.$$

Подставляя сюда $v_{\text{сближ}}$ и L, получим

$$vt\cos\alpha = \lambda t\left(\frac{v(2\lambda-1)\cos\alpha}{4} - \frac{v\cos\alpha}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad 1 = \lambda\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{4}\right).$$

Это – квадратное уравнение на λ, которое легко привести к виду $2\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, у которого имеется единственный положительный корень, равный

$$\lambda = \frac{3+\sqrt{41}}{4}.$$

Ответ: Вторая пушка должна стрелять с в $\lambda = (3+\sqrt{41})/4$ раза большей начальной скоростью.