

10 класс

Задача 1.

В бак диаметром $0,2$ м налито 40 кг воды и брошен кусок льда $m = 9$ кг с примерзшим камнем массой $m_2 = 3$ кг, $\rho_в = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_л = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Плотность камня $\rho_к = 3000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Как изменится уровень воды в баке (и на сколько) после того, как лед растает. (10б)

Решение:

Вычислим объём куска льда и объём камня по отдельности:

$$V_л = \frac{m_л}{\rho_л} = \frac{9}{900} = 0.01 \text{ м}^3$$

$$V_к = \frac{m_к}{\rho_к} = \frac{3}{3000} = 0.001 \text{ м}^3.$$

Средняя плотность камня со льдом:

$$\rho_{лк} = \frac{m_л + m_к}{V_л + V_к} = \frac{12}{0.011} \approx 1090 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

отсюда следует, что $\rho_{лк} > \rho_в$, что лед с примерзшим камнем утонут и вытеснят при этом объём воды:

$$V_в = V_л + V_к = 0.011 \text{ м}^3.$$

После таяния льда камень по-прежнему будет вытеснять объём воды, равный $V_к$. А объём воды, вытесненной растаявшим льдом будет равен:

$$V'_л = \frac{m_л}{\rho_в} = \frac{9}{1000} = 0.009 \text{ м}^3.$$

Так как $V'_л < V_л$, то таким образом объём воды в баке уменьшится на

$$\Delta V = V_л - V'_л = \frac{m_л}{\rho_л} - \frac{m_л}{\rho_в} = 0.001 \text{ м}^3$$

$$\Delta V = S \cdot \Delta h = \frac{\pi d^2}{4} \Delta h.$$

Отсюда рассчитаем, как изменится уровень воды в баке:

$$\Delta h = \frac{4\Delta V}{\pi d^2} = \frac{0.004}{3.14 \cdot 0.04} \approx 0.03 \text{ м}$$

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
-------	------------------------------------

10	Полностью верное решение.
9	Решение верное, но есть ошибки в расчетах
7-8	Вычислены объёмы льда и камня
6	Найден только объём камня или льда
4-5	Есть понимание физики явлений, но фактического решение нет
0	Решение неверное, или отсутствует.

Задача 2.

На поверхности воды плавает шарик радиуса $R = 5\text{ см}$. В покое центр шарика находится на глубине $H = 3\text{ см}$. Чему равен период T малых колебаний шарика вдоль вертикали? Плотность материала шарика $\rho = 0,8\text{ г/см}^3$ Ускорение свободного падения $g = 10\text{ м/с}^2$. Температура воды 27°C . (8 б)

Решение:

Когда шарик находится в покое, то границей между ним и водой вдоль поверхности воды является окружность радиуса r , причем $r^2 = R^2 - H^2$, что следует из теоремы Пифагора. Если шарик погрузится относительно положения покоя на глубину $x \ll R$, то Архимедова сила увеличится на величину $\Delta F_A \equiv f \cong x\pi r^2 = \pi(R^2 - H^2)x$. Аналогично, если шарик сместится вверх на высоту x , Архимедова сила уменьшится на величину f . Иными словами, сила \vec{f} направлена противоположно смещению \vec{x} шарика из положения равновесия: $f_x = -kx$, где величина $k = \pi(R^2 - H^2)$ играет роль коэффициента жесткости в аналогичной ситуации колебаний шарика массой m под действием упругой силы пружины с жесткостью k . Значит, период малых колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\pi(R^2 - H^2)}} \cong 5,7\text{ с}$$

Ответ: $T = 5,7\text{ с}$

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
8	Полное верное решение. Решена система уравнений.
7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6-7	Правильно записаны выражения для силы Архимеда и периода колебаний груз на пружинке
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

Задача 3.

Человек массой $M = 60\text{кг}$ поднялся по легкому канату, перекинутому через блок, на высоту $H = 2\text{м}$ за 4с . На другом конце каната висит груз массой $m = M$. Какую энергию затратил человек при подъеме? Начальные скорости равны нулю. (10 б)

Решение:

Пусть F_H - сила натяжения каната. В проекции на вертикальную ось Ox имеем:

$$F_H - Mg = MA \quad (1), \text{ где } A = \frac{2H}{t^2} - \text{ускорение человека и } t - \text{ время подъема,}$$

причем скорость человека в конце подъема равна $V = At$. Аналогичное уравнение Ньютона можно написать для груза:

$$F_H - mg = ma \quad (2),$$

откуда при сравнении (1) с (2) видно, что при $m = M$ ускорение груза $a = A$, т.е. груз повторяет вверх движение человека. Энергия человека (или груза) за время t изменится на величину

$$\Delta E = Mgh + \frac{1}{2}MV^2 = Mgh + \frac{2MH^2}{t^2} \quad (3)$$

Суммарное изменение энергии человека и груза, очевидно, есть искомая энергетическая затрата человека

$$E = 2\Delta E = 2Mgh + \frac{4MH^2}{t^2} = 2460 \text{ Дж} .$$

Ответ: $E = 2Mgh + \frac{4MH^2}{t^2} = 2460 \text{ Дж}$

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение. Решена система уравнений.
9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6-7	Правильно записаны выражения для сил и полной механической энергии
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

Задача 4.

Металлический стержень при температуре 0°C помещен в теплонепроницаемую изоляционную оболочку. К концам стержня прилагается электрическое напряжение U . Как меняется ток в стержне со временем t ? Начальное сопротивление стержня r_0 , температурный коэффициент сопротивления α , теплоемкость стержня C . (Сопротивление зависит от температуры $T^\circ\text{C}$ по формуле $r = r_0(1 + \alpha T)$). (10 б)

Решение:

За небольшой промежуток времени Δt в проводнике выделится количество Джоулева тепла

$$Q = \frac{U^2}{r} \Delta t \quad (1)$$

которое пойдет только на разогрев проводника при изменении его температуры на величину ΔT , т.е.

$$Q = C \Delta T \quad (2)$$

Из (1) — (2) следует, что

$$Q = \frac{U^2}{r_0} \Delta t = C(1 + \alpha T) \Delta T \quad (3)$$

Принимая за начало отсчета времени $t = 0$ и температуры $T = 0$, положим в (3) $\Delta t = t$, $\Delta T = T$, а за время t величину $(1 + \alpha T)$ заменим средним значением

$$\frac{1 + (1 + \alpha T)}{2} = 1 + \frac{1}{2} \alpha T \quad (4)$$

$$\text{Из (3) получим } \frac{U^2}{r_0} t = C(1 + \alpha T / 2) T \quad (5)$$

$$\text{Обозначив } x = 1 + \alpha T \quad (6)$$

$$\text{преобразуем (5) к виду } \frac{U^2}{r_0} t = C \frac{x^2 - 1}{2\alpha} \quad (7)$$

$$\text{откуда } x = \sqrt{\frac{2\alpha U^2}{Cr_0} t + 1} \quad (8)$$

Таким образом, учитывая (6), получим, что ток в проводнике со временем t меняется по закону

$$I = \frac{U}{r} = \frac{U}{r_0 x} = \frac{U}{r_0 \sqrt{\frac{2\alpha U^2}{Cr_0} t + 1}} \quad (9)$$

$$\text{Ответ: } I = \frac{U}{r_0 \sqrt{\frac{2\alpha U^2}{Cr_0} t + 1}}$$

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение. Решена система уравнений.
9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6-7	Правильно записаны выражения для теплового баланса
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

Задача 5.

Тонкий обруч радиусом 0,5м раскрутили до угловой скорости 30,2 рад/с и затем поместили в угол (коэффициент трения между стенкой, полом и обручем 0,5). Сколько оборотов сделает обруч до остановки? (10б)

Решение:

Пусть mg – сила тяжести обруча;

F_{mp1} – сила трения между полом и обручем;

F_{mp2} – сила трения между стеной и обручем;

N_1 – сила реакции опоры, действующая со стороны пола на обруч;

N_2 – сила реакции опоры, действующая со стороны стены на обруч.

Поскольку между обручем, стенкой и полом есть трение, угловая скорость вращения обруча со временем уменьшится до нуля, причём изменение кинетической энергии обруча равно работе сил трения, действующих на обруч:

$$\Delta E_k = 0 - E_{k0} = -\frac{mv^2}{2} = A_{mp1} + A_{mp2} = -(F_{mp1} + F_{mp2}) \cdot S.$$

При этом очевидны равенства: $v = \omega R$; $S = 2\pi Rn$, где n – число оборотов обруча до его остановки.

Найдём силы трения. Тело поступательно не перемещается. Это означает, что равнодействующая всех сил, равна нулю, т.е. в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси имеют место два равенства:

$$\begin{aligned} mg - N_1 - F_{mp2} &= mg - N_1 - \mu N_2 = 0 \\ N_2 - F_{mp1} &= N_2 - \mu N_1 = 0. \end{aligned}$$

Из них находим:

$$F_{mp1} = \frac{\mu mg}{1 + \mu^2}; \quad F_{mp2} = \frac{\mu^2 mg}{1 + \mu^2}.$$

Объединяя все полученные выражения, получим:

$$n = \frac{\omega^2 R(1 + \mu^2)}{4\pi\mu g(1 + \mu)} = 6 \text{ оборотов}$$

Ответ: 6 оборотов.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение и расчеты
8	Решение верное, получено выражение для числа оборотов, но есть ошибки в расчетах
6-7	Правильно получены выражения для сил трения
4-5	Правильно записано выражение для кинетической энергии
3-2	Правильно расставлены все силы
0	Решение отсутствует полностью