11 класс, 2015-2016 учебный год.

Задача №1.

Футболист забивает гол с одиннадцатиметрового штрафного удара точно под перекладину ворот. Какую минимальную энергию нужно было для этого сообщить мячу? Высота ворот 2.5 м, масса мяча 0.5 кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Возможный вариант решения: Обозначим минимальную вертикальную составляющую скорости мяча как υ_1, а минимальную горизонтальную составляющую этой скорости как υ_2. Минимальная вертикальная составляющая скорости определяется из условия подъема на высоту ворот h, формулой: $h = gt^2/2$ (1 балл) и формулой $\upsilon_1 = gt$ (1 балл). Из них получаем: $\upsilon_1 = \sqrt{2gh}$ (2 балла). Горизонтальная составляющая определяется из условия, чтобы за время подъема $t = \sqrt{2h/g}$ мяч долетел до ворот: $\upsilon_2 = l/t = l\sqrt{g/2h}$ (2 балла), где $l = 11$ м – расстояние, с которого производится удар. Поскольку сообщаемая футболистом мячу энергия является полностью кинетической, то ее минимальное значение определяется формулой:

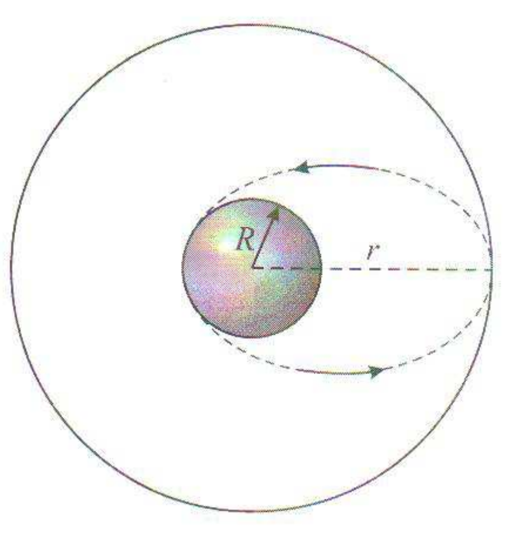
$$\mathrm{E} = m\upsilon^2/2 = \frac{m(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2)}{2} = \frac{mg(2h + l^2/2h)}{2} = mg(h + l^2/4h) \text{ (3 балла).}$$

Подставляя численные значения, получим: $E = 73$ Дж (1 балл).

Ответ: $E = 73$ Дж.

Задача №2.

Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите радиуса r. После срабатывания тормозного устройства его скорость уменьшилась, и спутник перешел на эллиптическую орбиту, касающуюся поверхности Земли. Полагая радиус Земли равным R, пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить через какое время спутник приземлится? Из астрономии известно, что квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей их орбит (третий закон Кеплера).



Возможный вариант решения: Если орбиты круговые, то роль большой полуоси играет радиус орбиты (1 балл).

В нашем случае большая полуось эллиптической орбиты, которая с одной стороны касается Земли, а с другой – исходной круговой орбиты, равна:

$$a = (r + R)/2 \text{ (2 балла).}$$

Используя третий закон Кеплера $(T/T_0)^2 = (a/r)^3$, получим период обращения спутника по эллиптической орбите:

$$T = T_0\left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} = T_0\left(\frac{r + R}{2r}\right)^{3/2} \text{ (1 балл),} \tag{1}$$

где T_0 – период обращения спутника по круговой орбите, который найдем, используя второй закон Ньютона:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}} = R\sqrt{\frac{g}{r}} \text{ (2 балла).}$$

Тогда:

$$T_0 = \frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{2\pi r^{3/2}}{R\sqrt{g}} \text{ (2 балла).} \qquad (2)$$

Подставим выражение (2) в (1) и, учитывая, что с момента торможения до посадки спутник пройдет как раз половину длины орбиты, имеем:

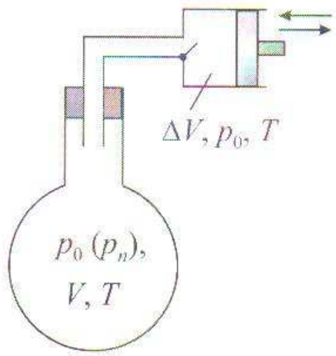
$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{2\pi r^{3/2}}{2R\sqrt{g}}\left(\frac{r+R}{2r}\right)^{3/2} = \frac{\pi}{R\sqrt{g}}\left(\frac{r+R}{2}\right)^{3/2} \text{ (2 балла).}$$

Ответ: $\tau = \frac{\pi}{R\sqrt{g}}\left(\frac{r+R}{2}\right)^{3/2}$.

Задача №3.

Сколько ходов должен сделать поршневой насос, объем камеры которого $\Delta V = 100\text{ см}^3$, чтобы давление воздуха в откачиваемом им резервуаре объемом $V = 2500\text{ см}^3$ уменьшилась в $k = 10^3$ раз? Начальное давление в резервуаре считать равным нормальному, температура воздуха при откачке поддерживается постоянной.

Возможный вариант решения: Поскольку температура воздуха в камере насоса и резервуаре не изменяется ($T = const$), используем для подсчета давления p_1, установившегося в резервуаре после первого хода поршня (уменьшение объема воздуха на ΔV) закон Бойля–Мариотта (2 балла):



$$p_0V = p_1(V+\Delta V), \quad \text{откуда} \quad p_1 = p_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^1 \text{ (2 балла).} \quad (1)$$

Аналогично после второго хода поршня:

$$p_1V = p_2(V+\Delta V), \quad \text{откуда} \quad p_2 = p_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^2 \text{ (1 балл),} \quad (2)$$

а после n-го хода:

$$p_n = p_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^n \text{ (1 балл).} \qquad (3)$$

По условию задачи: $p_n = \frac{p_0}{k}$, где $p_0 = 1{,}01\cdot 10^5$ Па. Поэтому из (3) с учетом того, что $\frac{1}{k} = \left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^n$ (1 балл), легко получить:

$$n = -\frac{\lg k}{\lg\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)} = \frac{\lg k}{\lg\left(\frac{V+\Delta V}{V}\right)} = 176 \text{ (3 балла).}$$

Ответ: $n = 176$.

Задача №4.

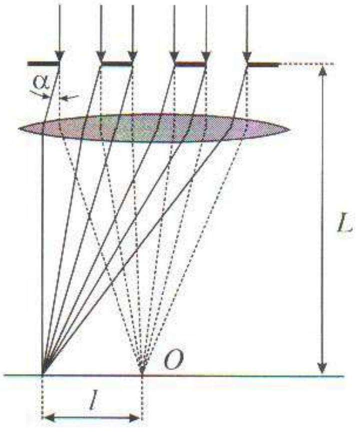
Из вершин правильного шестиугольника со стороной 1 м одновременно пускают по направлению к центру шесть одинаковых заряженных частиц. Начальная скорость частиц 1 м/с. Когда расстояние между частицами уменьшилось в два раза, то скорость каждой также уменьшилась вдвое. До какого минимального расстояния сблизятся частицы?

Возможный вариант решения: Из соображений симметрии ясно, что система зарядов по мере своей эволюции будет сохранять форму правильного шестиугольника (1 балл). Рассмотрим две такие геометрически подобные конфигурации системы. Из соображений размерности, очевидно, что электростатическая энергия системы W зависит от геометрического размера l по закону $W = C/l$ (3 балла), где C – постоянная для данной конфигурации зарядов. Используя этот результат, запишем закон сохранения энергии для всех трех состояний: $W + m\upsilon_0^2/2 = 2W + m\upsilon_0^2/8 = nW$ (3 балла). Решая эту систему из трех уравнений, получим: $n = 7/3$ (2 балла). Поскольку $W = C/l$, а первоначальное расстояние между частицами $l = 1$ м, то отсюда следует, что частицы сблизятся до расстояния $3/7$ м (1 балл).

Ответ: $3/7$ м.

Задача №5.

Определить число штрихов n, приходящихся на 1 см дифракционной решетки, если при нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 600$ нм решетка дает первый максимум на расстоянии $l = 3.3$ см от центрального. Расстояние от решетки до экрана $L = 110$ см. Линза расположена вблизи решетки.



Возможный вариант решения: Запишем формулу дифракционной решетки:

$$d \sin\alpha = k\lambda, \text{ (2 балла)}$$

где α – угол, под которым наблюдается k-ый максимум, k – порядок максимума.

Для максимума 1-го порядка угол α мал, поэтому можно считать:

$$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{l}{L} \text{ (3 балла). (Рисунок – 1 балл)}$$

Тогда уравнение дифракционной решетки перепишется в виде:

$$\frac{dl}{L} = k\lambda, \text{ откуда } d = \frac{k\lambda L}{l} \text{ (2 балла),}$$

а число штрихов на 1 см равно:

$$n = \frac{l}{k\lambda L} = 500 \text{ (2 балла).}$$

Ответ: $n = 500$.