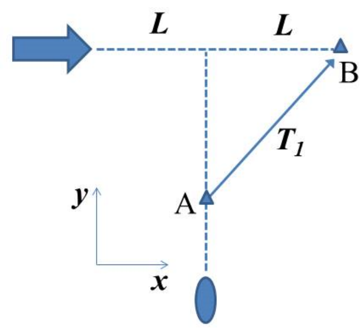
Открытая олимпиада. Отборочный этап 2015-16. 7 класс. Решения.

Задача 1



Космонавт после катапультирования движется вдоль двух направлений x и y (вправо и наверх). Скорость движения вдоль y совпадает со скоростью движения капсулы V, а скорость движения вправо равна U. Для попадания на корабль космонавт должен оказаться на оси движения корабля, в одной и той же с кораблем точке (точка B, см. рис.). Время движения космонавта до оси движения корабля от момента поломки равно $T = 2L/V$, так как с момента поломки космонавт движется вдоль оси y с постоянной скоростью V . Корабль за это время пройдет путь равный $VT = 2L$, т.е. окажется на расстояние L правее от точки пересечения траекторий корабля и капсулы (точка B). Именно в этой точке должен оказаться косманавт через время T после поломки.

Таким образом, космонавту требуется переместиться вдоль оси x на расстояние L со скоростью U: нетрудно заметить, что на это уйдет время $T_1 = L/U$ - это время движения по отрезку AB. Другими словами: космонавту надо катапультироваться за время T_1 до момента когда капсула пересечет траекторию корабля (время T с момента поломки). Таким образом, космонавту надо катапультироваться через время $t = T - T_1$ после поломки.

Ответ: $t = 2L/V - L/U = 240$ сек (1-ый вариант), $= 100$ сек (2-ой вариант).

Задача 2

Рассмотрим объем V, который находится под поверхностью воды - он складывается из двух составляющих: объема воды и объема подводной лодки V_S. Объем воды в процессе управления лодкой не меняется, значит изменение объема V равно изменению объема лодки:

$$\Delta V = \Delta V_S. \tag{1}$$

Рассмотрим увеличение объема V за время δt - оно связано с поднятием уровня воды на δh. С геометрической точки зрения увеличение V происходит за счет присоединения к нему цилиндрического объема ΔV. Учитывая связь между объемом цилиндра, площадью его основания и высотой можно записать:

$$\Delta V = S\delta h = Sv\delta t\ , \tag{2}$$

где v есть скорость поднятия уровня воды в ведре. Проводя аналогичные рассуждения с подводной лодной легко заметить, что:

$$\Delta V_S = S_1 u\delta t. \tag{3}$$

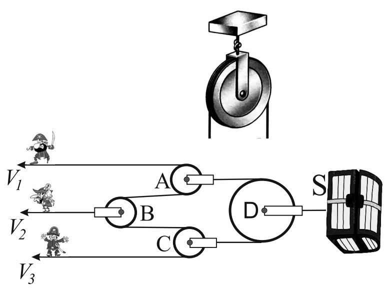
С учетом выражения (1) теперь легко получить, что

$$S_1 u = Sv\ , \tag{4}$$

откуда легко следует ответ.

Ответ: $v = uS_1/S = 2$ мм/мин (1-ый вариант), $= 0.08$ мм/сек (2-ой вариант).

Задача 3



Пусть за определенное время t пираты прошли путь x_1, x_2 и x_3. Полное перемещение сундука y складывается из суммы перемещений, связанных с перемещением каждого из пиратов $y = y_1 + y_2 + y_3$.

Сформулируем важное правило: если с одной стороны от блока веревка подтянута влево на величину L_1, а с другой стороны на величину L_2, то блок сдвинется влево на величину $(L_1+L_2)/2$. Предлагаем доказать его самостоятельно с помощью простых геометрических соображений, и, учитывая, что веревка нерастяжима, т.е. длина ее постоянна.

Начнем с вычисления y_1 : 1-ый пират переместился, а остальные стоят на своих местах. Блок B, очевидно неподвижен; предположим сперва также, что неподвижен блок C. В этом случае неподвижна веревка между блоками A и B (т.е. L_2 в нашем правиле равно нулю). Если блок A сместился на величину z, то, согласну правилу $z = x_1/2$, а также $y_1 = z/2$ и можно записать:

$$y_1 = z/2 \ ; \ z = x_1/2 \ ; \ y_1 = x_1/4 \ . \tag{5}$$

Вернемся к блоку C - пусть он сдвинулся влево на величину Δ (может быть отрицательную). Тогда из сохранения длины веревки, проходящей через блоки A-B-C (напомим, что блок B неподвижен) следует, что блок A сдвинется на величину Δ вправо. В соответствии с правилом положение блока D при этом не изменится. Таким образом, предположение о неподвижности блока C не влияет на ответ.

Случай 3-го пирата полностью аналогичен 1-му пирату и мы можем сразу записать:

$$y_3 = x_3/4. \tag{6}$$

В случае перемещения второго пирата на x_2, блоки A и C сдвинуться на величину $x_2/2 + \Delta/2$ и $x_2/2 - \Delta/2$, значит, в соответсвии с правилом, блок D сдвинется на $x_2/2$.

$$y_2 = x_2/2. \tag{7}$$

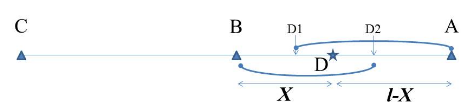
Складывая полученные результаты можно получить:

$$y = x_1/4 + x_2/2 + x_3/4 \ , \tag{8}$$

и, если поделить обе части полученного выражения на время, то можно получить ответ.

Ответ Скорость сундука $U = V_1/4 + V_2/2 + V_3/4 = 2.75$ км/ч (1-ый вариант), 3.75 км/ч (2-ой вариант)

Задача 4



Через небольшое время после выхода с остановки B Лена может с легкостью на нее успеть, если увидит автобус. В процессе движения Лена доходит до некоторой точки D1, начиная с которой она может добежать до остановки A, если увидит автобус. Также можно выбрать точку D2, после прохода которой, Лена уже не успеет добежать до остановки B. По условию задачи отрезки B-D2 и D1-A пересекаются, т.к. есть область откуда Лена может добежать до любой из двух остановок, если увидит автобус. В частности, это означает, что точка D2 лежит правее D1. Чем больше скорость, с которой Лена может бегать, тем больше расстояние между D1 и D2. По мере уменьшения скорости Лены, точки D1 и D2 сближаются, и при некоторой скорости U совпадают. Скорость U является минимально возможно скоростью Лены, бегая с которой она гарантировано попадет на автобус. Действительно, если скорость Лены меньше U, то точка D2 будет левее D1 и между ними будет отрезок, из которого Лена не успеет ни на одну из остановок.

Итак, рассмотрим точку D = D1 = D2. Понятно, что если бежать (со скоростью U) из нее на остановку B или A, то на любой из этих остановок Лена окажется одновременно с автобусом. Введем величину X, как расстояние BD. Тогда из условий, что время движения Лены по отрезку DB равно времени движения автобуса по отрезку CB, и то что время движения Лены по отрезку DA равно времени движения автобуса по отрезку CA можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{X}{U} &= \frac{L-l}{v_A} \\ \frac{l-X}{U} &= \frac{L}{v_A} \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Приведенная система уравнений решает задачу. Можно сложить левые и правые части уравнений и получить, что

$$\frac{l}{U} = \frac{2L-l}{v_A}, \tag{10}$$

откуда следует ответ.

Ответ Минимальная скорость Лены $U = lv_A/(2L-l) = 12$ км/ч (1-ый вариант), 15 км/ч (2-ой вариант)

Задача 5

После таяния рост снеговика уменьшился от начального L до αL, $\alpha = 4/5$ или $2/3$ в 1-ом и 2-ом вариантах соответственно. Так как форма снеговика не изменилась, то таким же образом уменьшились его ширина и толщина. Мы знаем, что объем тела определяется произведением его высоты, ширины и толщины. Тогда понятно, что если старый объем был V, то после таяния он стал равным $\alpha^3 V$. Так как плотность снеговика не изменилась, то масса уменьшилась так же как и объем и стала равной $\alpha^3 m$.

Вариант 1

Масса вытекшей из снеговика воды равна

$$m_W = (1-\alpha^3)m \ , \tag{11}$$

откуда можно получить ответ

Ответ Объем вытекшей воды равен $V = (1-\alpha^3)m/\rho = 24.4$ литра.

Вариант 2

Объем расстаявшего снега равен

$$V_S = (1-\alpha^3)V \ , \tag{12}$$

откуда можно получить ответ

Ответ Масса вытекшей воды $m = (1-\alpha^3)V\rho_0 = 38$ кг