Возможные решения задач (11 класс)

Задача 1 (10 баллов). Очевидно, камень должен быть брошен вверх с некоторой высоты нал землей. Действительно, при этом вторую половину пути камень проходит разогнавшись, т.е. имея большую, чем на первой половине, среднюю скорость. **(3 балла)**

Пусть t_1 – время полета до верхней точки, а t_2 – время падения от этой точки до середины пути. Тогда

$$\frac{gt_1^2}{2}+\frac{gt_2^2}{2}=gt_2t_3+\frac{gt_3^2}{2},\ \textbf{(2 балла)}$$

где t_3 = 1 с, а g – ускорение свободного падения.

Выразим отсюда время t_1:

$$t_1=\sqrt{2t_2t_3+t_3^2-t_2^2}\,.$$

Общее время полёта:

$$t = t_1 + t_2 + t_3.$$

Чтобы оно было максимально, должна быть максимальна сумма:

$$t_1+t_2=t_2+\sqrt{2t_2t_3+t_3^2-t_2^2}\,.\ \textbf{(1 балл)}$$

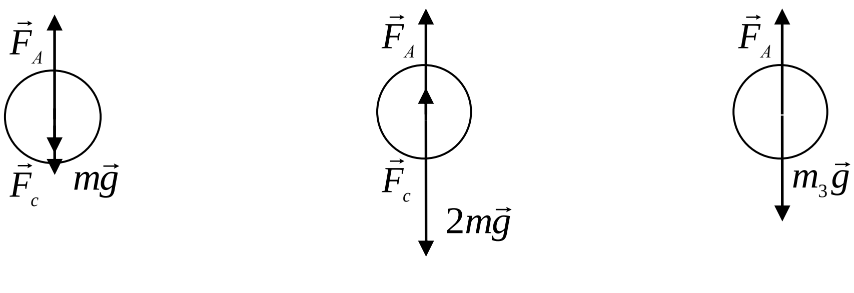
Максимум функции можно искать различными способами, например, взяв производную от последнего выражения по t_2 и приравняв ее к нулю. Тогда получаем:

$$1+\frac{t_3-t_2}{\sqrt{2t_2t_3+t_3^2-t_2^2}}=0,$$

откуда, подставляя t_3 = 1 с, находим t_2 = 2 с. (**2 балла)**

Тогда из выражения для t_1 получаем, что t_1 = 1 с, а общее максимальное время равно 4 секундам. (**1 балл**) Такое время полета достигается при бросании камня вверх с высоты $h \approx 40$ м с начальной скоростью $v_0 \approx 10$ м/с. **(1 балл)**

Задача 2 (10 баллов). При движении тела в вязкой жидкости на него действует сила сопротивления F_c, зависящая от скорости движения и от размеров этого тела; сила сопротивления направлена противоположно скорости движения. (**3 балла)** Т.к. размеры трех шаров одинаковы, то на них действуют одинаковые силы Архимеда F_A. (**1 балл)** Приведем вспомогательные рисунки для всех случаев.



1) 2) 3)

Для первого шара:

$mg + F_c = F_A$. (**1 балл**) (1)

Для второго шара:

$2mg = F_A + F_c$. (**1 балл**) (2)

Для третьего шара:

$m_3 g = F_A$. (**1 балл**) (3)

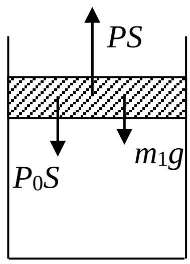
Решение системы уравнений (1) – (3) дает $m_3 = 1{,}5m$. (**3 балла**)

Задача 3 (10 баллов). Массу пара найдем из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$P_0 V = \frac{m}{M} RT .$$

Объем пара задан, а его давление P_0 и температура T совпадают с давлением и температурой в помещении (поршень может свободно скользить и стенки теплопроводящие). Поэтому

$$m = \frac{P_0 VM}{RT} = \frac{10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}018}{8{,}314 \cdot 373} \approx 0{,}003\ кг$$. (**3 балла**)



Найдем давление пара, которое удержало бы поршень при вертикальной ориентации цилиндра (см. рис.). Из условия равновесия поршня следует:

$PS = P_0 S + m_1 g$,

где P – давление пара под поршнем, S – площадь поршня, P_0 – давление в помещении, m_1 – масса поршня. Отсюда находим

$$P = P_0 + \frac{m_1 g}{S} = 10^5 + \frac{10 \cdot 9{,}8}{10^{-2}} = 109{,}8\ кПа .$$

В то же время известно, что давление насыщенного пара воды при 100°C равно 101,325 кПа. Поскольку это давление меньше требующегося для удержания поршня, то весь пар сконденсируется в воду, и его объем под поршнем будет равен нулю. Близок к нулю будет также и объем получившейся воды

$$V_B = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{10^3} = 3 \cdot 10^{-6}\ м^3$$. (**4 балла**)

Обозначим температуру пара, до которой его следовало бы нагреть, T_1. Запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для нового и первоначального состояний пара:

$$PV = \frac{m}{M} RT_1,$$

$$P_0 V = \frac{m}{M} RT,$$

где $P = P_0 + \frac{m_1 g}{S} = \left(10^5 + \frac{10 \cdot 9{,}8}{10^{-2}}\right) Па = 109{,}8\ кПа$.

Поделив первое соотношение на второе, находим, что

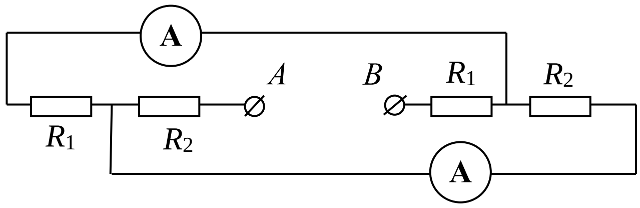
$$T_1 = T \frac{P}{P_0},$$

откуда

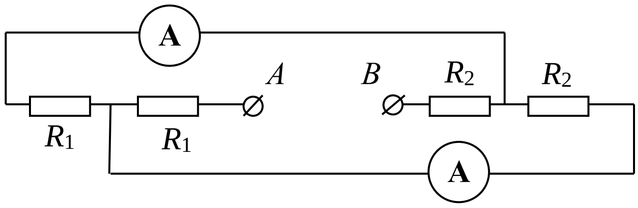
$$\Delta T = T_1 - T = T\left(\frac{P}{P_0} - 1\right) = 373 \cdot 0{,}098 \approx 36{,}6K$$. (**3 балла**)

Задача 4 (10 баллов). Возможны четыре случая расположения резисторов:

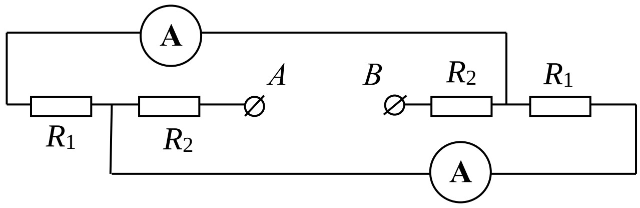
1)



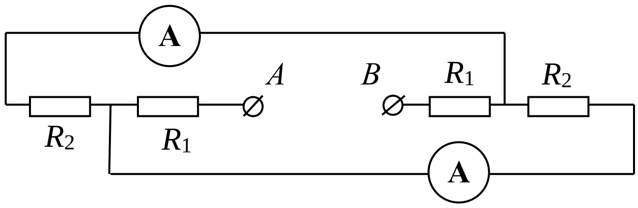
2)



3)



4)



Случаи 3 и 4 не соответствуют условию задачи – токи, текущие через амперметры, в этих случаях будут одинаковы. (**2 балла**)

Рассмотрим случай 1. Подключим к точкам *A* и *B* источник постоянного напряжения (например, к точке *A* подключим отрицательный полюс, к точке *B* – положительный). Тогда по ветви цепи, содержащей источник напряжения, пойдет ток I, через «верхний» амперметр и последовательно соединенный с ним резистор R_1 пойдет ток I_1, а через «нижний» амперметр и последовательно соединенный с ним резистор R_2 пойдет ток I_2.

Пусть $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 60$ Ом.

Для цепи 1 имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} U - I(R_1 + R_2) = I_1 R_1 \\ U - I(R_1 + R_2) = I_2 R_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases}$$. (**3 балла**)

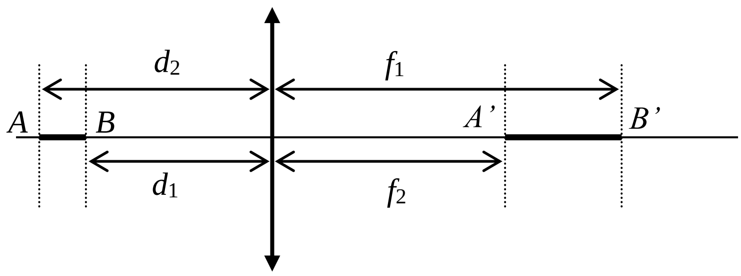
Меньшим будет ток, текущий через резистор с бóльшим сопротивлением, т.е. $I_2 = 1$ А.

Из системы уравнений следует, что $I_1 = 2$ А, $I = 3$ А и

$$U = I_2 R_2 + I(R_1 + R_2) = 330\,B$$. (**2 балла**)

В случае 2 система уравнений будет такая же, как и в случае 1. Остальное решение аналогично случаю 1. Ответ тот же. (**3 балла**)

Задача 5 (10 баллов). Способ 1. Рассмотрим изменение толщины монеты при рассмотрении ее через линзу. Пусть AB – толщина монеты, $A'B'$ – «толщина» изображения монеты. Изображение монеты, полученное через лупу, является мнимым. В случае действительного изображения при том же ходе рассуждений получается та же формула. Поэтому будем рассматривать действительное изображение в линзе. (**4 балла**)



Для точки B: $\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}$, для точки A: $\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}$. (**1 балл**)

Следовательно:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{d_2-d_1}{d_1 d_2}=\frac{f_1-f_2}{f_1 f_2} \Rightarrow \frac{f_1-f_2}{d_2-d_1}=\frac{f_1 f_2}{d_1 d_2}.$$

$d_2 - d_1$ – толщина монеты, $f_1 - f_2$ – «толщина» изображения. (**2 балла**)

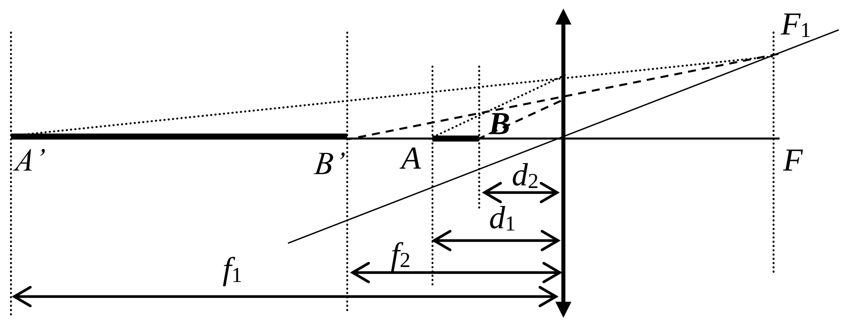
$\varGamma = f / d$ – поперечное увеличение линзы (перпендикулярно главной оптической оси). Продольное увеличение линзы (параллельно главной оптической оси):

$$\beta=\frac{f_1-f_2}{d_2-d_1}=\frac{f_1 f_2}{d_1 d_2}=\Gamma_1\Gamma_2.$$ (**2 балла**)

Т.к. толщина монеты незначительна, то поперечные увеличения двух сторон монеты можно считать примерно одинаковыми. Тогда $\beta=\Gamma^2=n^2$. (**1 балл**)

Толщина монеты увеличивается в n^2 раз.

Способ 2. Рассмотрим изображение монеты в лупе. Монета (предмет) помещается между оптическим центром и фокусом лупы (собирающей линзы). Изображение монеты будет в этом случае мнимым увеличенным. Построим его.



AB – толщина монеты, $A'B'$ – «толщина» изображения монеты. Монета располагается перпендикулярно главной оптической оси лупы. Проведем побочную оптическую ось и фокальную плоскость лупы, перпендикулярную чертежу, получим точку их пересечения (точка F_1 на рис.). Построим изображения точек A и B – A' и B' соответственно. (**4 балла**)

Для точки *A*: $\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}$, для точки *B*: $\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2}$. (**1 балл**)

Следовательно:

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{d_2}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{d_1-d_2}{d_1d_2}=\frac{f_1-f_2}{f_1f_2} \Rightarrow \frac{f_1-f_2}{d_1-d_2}=\frac{f_1f_2}{d_1d_2}.$$

$d_1 - d_2$ – толщина монеты, $f_1 - f_2$ – «толщина» изображения. (**2 балла**)

$\Gamma = f / d$ – поперечное увеличение линзы (перпендикулярно главной оптической оси). Продольное увеличение линзы (параллельно главной оптической оси):

$$\beta=\frac{f_1-f_2}{d_1-d_2}=\frac{f_1f_2}{d_1d_2}=\Gamma_1\Gamma_2.$$ (**2 балла**)

Т.к. толщина монеты незначительна, то поперечные увеличения двух сторон монеты можно считать примерно одинаковыми. Тогда $\beta=\Gamma^2=n^2$. (**1 балл**)

Толщина монеты увеличивается в n^2 раз.