

# Районный тур 2017/18. 10 класс. I вариант

## Задача 1.

В силу того, что после установления теплового равновесия часть льда осталась в стакане, конечная температура льда, воды и монетки равна  $0^\circ\text{C}$ . Таким образом, температура монетки уменьшилась со значения  $t_0$  до  $0^\circ\text{C}$ , а отданное монеткой тепло пошло на плавление льда. Обозначим массу монетки за  $m$ . Тогда уравнение теплового баланса будет иметь следующий вид:

$$\lambda \Delta M = cmt_0, \quad (1)$$

где  $\Delta M$  — масса расплавленной части льда. Обозначим толщину монетки за  $d$ . Пусть  $h$  — это высота поверхности воды в конечном состоянии по отношению к исходному уровню поверхности льда. Величина  $h$  складывается из трех слагаемых. Во-первых, наличие монетки увеличивает уровень воды на  $d$ . Во-вторых, сам слой воды имеет толщину  $\Delta M/(\rho_{\text{в}}S)$ , где  $S$  — площадь сечения стакана. Наконец, плавление льда приводит к уменьшению толщины его слоя на величину  $\Delta M/(\rho_{\text{л}}S)$  (этот вклад следует взять с отрицательным знаком). Таким образом, имеем следующее соотношение:

$$h = d + \frac{\Delta M}{S} \left( \frac{1}{\rho_{\text{в}}} - \frac{1}{\rho_{\text{л}}} \right). \quad (2)$$

Рассмотрим отношение  $\Delta M/S$ . Подставим в него значение  $\Delta M$ , взятое из уравнения (1), и домножив числитель и знаменатель на  $d$ , воспользуемся определением плотности  $\rho_{\text{м}} = m/V = m/(Sd)$ :

$$\frac{\Delta M}{S} = \frac{cmt_0}{\lambda S} = \frac{ct_0 d m}{\lambda Sd} = \frac{c\rho_{\text{м}}t_0 d}{\lambda}. \quad (3)$$

Тогда для относительной величины  $h/d$  получаем следующее выражение:

$$\frac{h}{d} = 1 + \frac{c\rho_{\text{м}}t_0}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_{\text{в}}} - \frac{1}{\rho_{\text{л}}} \right). \quad (4)$$

Заметим, что величина в скобках отрицательна, т. к.  $\rho_{\text{в}} > \rho_{\text{л}}$ . Подставляя числовые значения, получаем  $h/d = 0.9$  (90%).

**Ответ:** Высота поверхности воды по отношению к исходному уровню поверхности льда составляет 90% от толщины монетки.

## Задача 2.

Рассмотрим процесс “выбрасывания” акробата с платформы А. Обозначим массу одной платформы через  $m$ , искомый радиус вращения качелей через  $R = |AO| = |OB|$ . Через  $u$  обозначим линейную скорость вращения платформ после срабатывания пружины. Отметим, что в силу симметричного расположения платформ относительно точки О, моменты сил тяжести, действующих на них уравновешены. В результате, качели вращаются равномерно. Обозначим через  $v_y$  и  $v_x$  проекции начальной скорости акробата (в неподвижной системе отсчета) на вертикальную и горизонтальную оси, соответственно. Система координат ориентирована так, как показано на Рис. 1, начало координат помещено в точку, где изначально располагался акробат. Поскольку в момент прыжка на систему не действуют внешние силы в горизонтальном направлении, можно выписать закон сохранения импульса

$$2mu = Mv_x, \quad (5)$$

где учтено, что вращаться начинают обе платформы качелей. Данный результат можно получить также, рассмотрев закон сохранения момента импульса относительно точки О. Кроме того, поскольку в процессе “выбрасывания” акробата на систему не действуют внешние силы, совершающие работу, приходим к выводу, что выполняется закон сохранения энергии

$$E = mu^2 + \frac{M}{2}(v_x^2 + v_y^2). \quad (6)$$

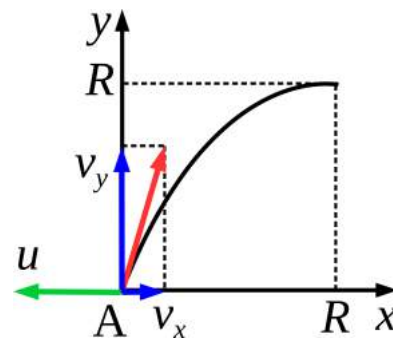


Рис. 1:

Поймем теперь, к каким следствиям приводит тот факт, что акробат, будучи в верхней точке своей траектории, приземляется в точности на платформу В качелей, повернувшись таким образом, что стержень АВ горизонтален. Обозначим время полета через  $t$ . За время полета акробат смещается направо на расстояние  $R$  и поднимается вверх на высоту  $R$ :

$$R = v_x t, \quad R = v_y t - \frac{gt^2}{2}. \quad (7)$$

Тот факт, что точка приземления есть верхняя точка траектории означает, что его вертикальная скорость обращается в этот момент в ноль

$$0 = v_y - gt. \quad (8)$$

Наконец, за время полета акробата качели должны повернуться на угол  $\pi/2 + 2\pi n$ , где  $n$  — натуральное число. Таким образом,

$$ut = \pi \left( \frac{1}{2} + 2n \right) R. \quad (9)$$

Собирая все полученные уравнения вместе, приходим к выражению

$$E = \frac{MgR}{4} \left[ 5 + \pi \left( \frac{1}{2} + n \right) \right]. \quad (10)$$

Окончательно, для радиуса вращения качелей имеем

$$R = \frac{4E}{Mg[5 + \pi(1/2 + 2n)]}. \quad (11)$$

Ответ: Выражение для радиуса вращения качелей приведено в (11),  $n$  — натуральное число.

### Задача 3.

В условии задачи было выбрано неудачное обозначение для длины круговой дороги. Ниже мы будем обозначать длину буквой  $L$ , а радиус — буквой  $R$  ( $L = 2\pi R$ ).

Рассмотрим произвольный момент времени, в который угловое расстояние между автомобилями равно  $\varphi$ . В этот момент угол между векторами скоростей  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  также равен  $\varphi$ . Рассмотрим разность скоростей  $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  (см. Рис. 2). По теореме косинусов имеем:

$$|\vec{u}|^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi, \quad (12)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — модули соответствующих векторов (будем для определенности считать, что  $v_1 > v_2$ ). Выражение (12) задает квадрат относительной скорости. С учетом того, что угол  $\varphi$  изменяется со временем по закону  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ , где  $\omega = (v_1 - v_2)/R$ , легко видеть, что модуль относительной скорости является периодической функцией времени с периодом  $T = 2\pi/\omega = L/(v_1 - v_2)$ . При этом максимальное и минимальное значения модуля относительной скорости равны  $v_1 + v_2$  и  $v_1 - v_2$ , соответственно. Данные утверждения могут быть доказаны и без вывода явного выражения (12).

По графику легко определить величину  $T$ , а следом и разность  $v_1 - v_2$ . Действительно, разность моментов времени, отвечающих минимуму и максимуму, равна  $85 \text{ с} - 25 \text{ с} = 60 \text{ с}$  (это составляет половину периода). Таким образом,  $v_1 - v_2 = L/T = (600 \text{ м})/(2 \cdot 60 \text{ с}) = 5 \text{ м/с}$ . Зная разность модулей скоростей, мы теперь можем отмасштабировать ось ординат. Например, отношение  $v_1 + v_2$  к  $v_1 - v_2$  может быть легко найдено по клеточкам:  $(v_1 + v_2)/(v_1 - v_2) = 27/5$ . Отсюда сумма модулей скоростей  $v_1 + v_2 = 27 \text{ м/с}$ . Зная сумму и разность скоростей автомобилей, легко установить, что  $v_1 = 16 \text{ м/с}$  и  $v_2 = 11 \text{ м/с}$ .

Ответ: Модули скоростей автомобилей равны  $16 \text{ м/с}$  и  $11 \text{ м/с}$ .

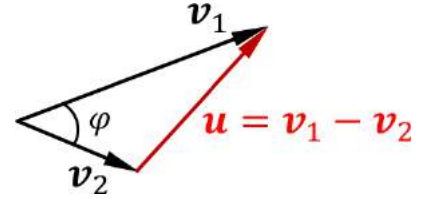


Рис. 2:

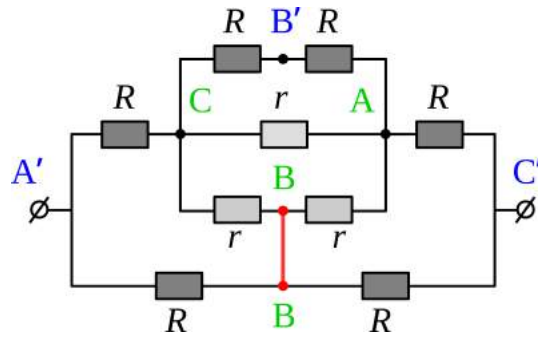


Рис. 3:

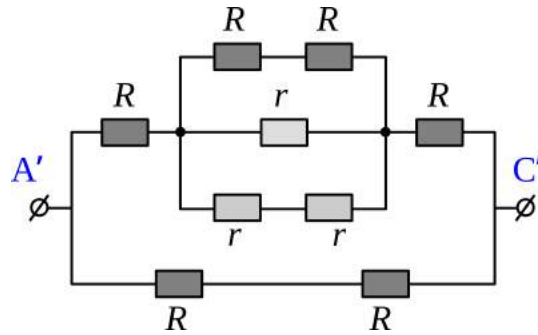


Рис. 4:

#### Задача 4.

Обозначим сопротивление стороны малого треугольника ABC через  $r$ , а стороны большого треугольника  $A'B'C'$  через  $2R$ . Коэффициент 2 введен для удобства: сторона треугольника  $A'B'C'$  в два раза больше стороны треугольника ABC. Ясно, что когда Миша измерял сопротивление в первый раз (между точками A и C), он получил значение

$$R_{AC} = \frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2}{3}r. \quad (13)$$

Действительно, участок  $A - B - C$  имеет сопротивление  $2r$  и он соединен параллельно с участком AC.

Рассмотрим внимательно схему, которая получилась у Миши, после того, как он припаял второй треугольник  $A'B'C'$ . Эквивалентная схема изображена на Рис. 3. Любой узел в электрической схеме можно “растянуть”, вставив соединение с нулевым сопротивлением. Для удобства данная процедура проделана для узла B, поэтому он изображен на эквивалентной схеме два раза. В силу симметрии ток не течет по соединительному проводу BB, выделенному красным цветом. Следовательно, этот соединительный провод можно просто убрать из схемы, при этом распределение токов не изменится. Окончательная эквивалентная схема изображена на Рис. 4. Сопротивление между точками  $A'$  и  $C'$  равно

$$R_{A'C'} = 2R \frac{3R + 2r}{6R + 3r}. \quad (14)$$

Приравняв сопротивления  $R_{AC}$  и  $R_{A'C'}$ , в результате получим, что

$$r = \sqrt{3}R. \quad (15)$$

Обозначим длину стороны треугольника ABC через  $l$ . Пусть  $\rho$  — удельное сопротивление материала, из которого сделаны обе проволоки. Наконец, пусть  $S_1$  и  $S_2$  есть площади поперечных сечений первой и второй проволок, соответственно. Тогда

$$\frac{\rho l}{S_1} = \sqrt{3} \frac{\rho l}{S_2} \Leftrightarrow S_2 = \sqrt{3}S_1. \quad (16)$$

**Ответ:** Площадь поперечного сечения проволоки  $A'B'C'$  в  $\sqrt{3}$  раз больше, чем площадь поперечного сечения проволоки ABC.

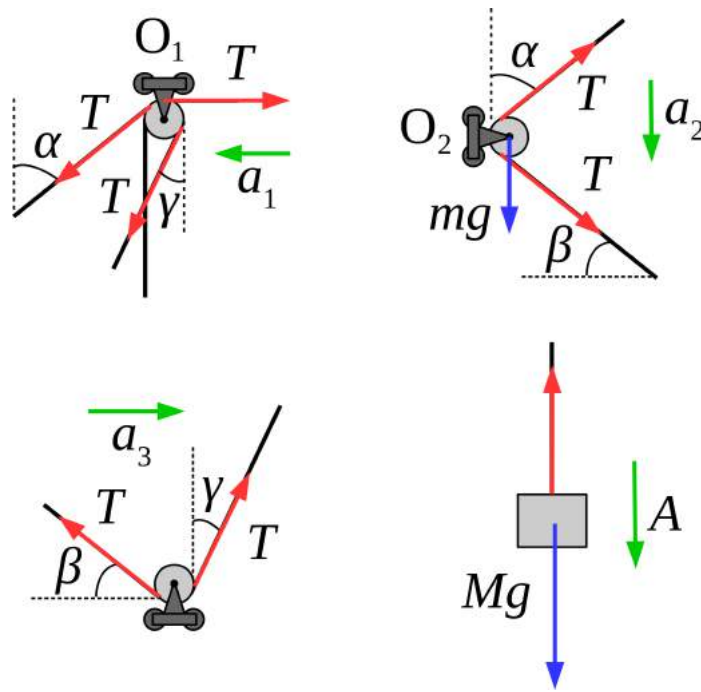


Рис. 5:

### Задача 5.

Обозначим ускорение груза через  $A$ , ускорения вагонеток с блоками  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  через  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , соответственно. Для определенности будем считать, что груз и блок  $O_2$  опускаются, блок  $O_1$  смещается влево, а блок  $O_3$  движется вправо. Если данное предположение ошибочно, то в результате будут получены отрицательные значения ускорений. Если ускорение отрицательно, это означает, что соответствующее тело начинает смещаться в противоположном направлении.

На Рис. 5 показаны все силы, которые приложены к грузу и вагонеткам с блоками сразу после того, как систему отпускают, и которые имеют ненулевую проекцию на направление движения рассматриваемых тел. Выпишем второй закон Ньютона для груза и вагонеток в проекции на направление их движения

$$\begin{aligned} ma_1 &= T(\sin \alpha + \sin \gamma - 1), \\ ma_2 &= T(\sin \beta - \cos \alpha) + mg, \\ ma_3 &= T(\sin \gamma - \cos \beta), \\ MA &= Mg - T. \end{aligned}$$

Сразу исключим из этой системы силу натяжения нити  $T = M(g - A)$ :

$$a_1 = \frac{M}{m}(g - A)(\sin \alpha + \sin \gamma - 1), \quad (17)$$

$$a_2 = \frac{M}{m}(g - A)(\sin \beta - \cos \alpha) + mg, \quad (18)$$

$$a_3 = \frac{M}{m}(g - A)(\sin \gamma - \cos \beta). \quad (19)$$

Данная система трех уравнений содержит четыре неизвестных: ускорения  $A$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ . Чтобы эту систему можно было решить, необходимо дополнить ее кинематической связью ускорений всех тел. Действительно, смещения груза и вагонеток не являются независимыми: они оказываются связанными в силу наличия нити, охватывающей все блоки.

Поскольку по условию нить нерастяжимая, кинематическую связь ускорений можно получить, рассмотрев условие постоянства длины нити. Обозначим длины отдельных участков нити так, как это показано на Рис. 6. Таким образом полная длина нити равна

$$S = L + L_1 + L_2 + L_3 + H.$$

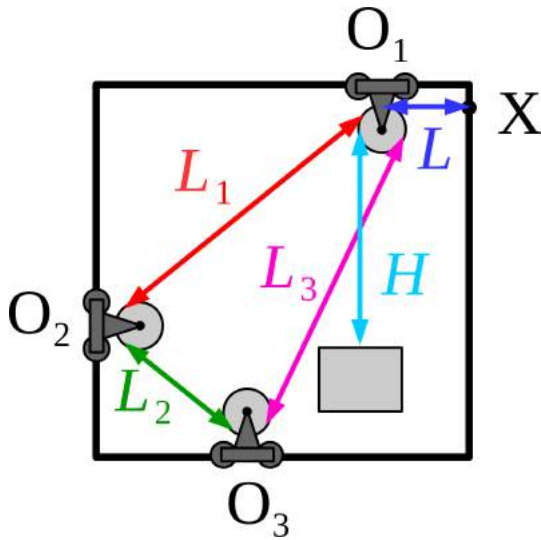


Рис. 6:

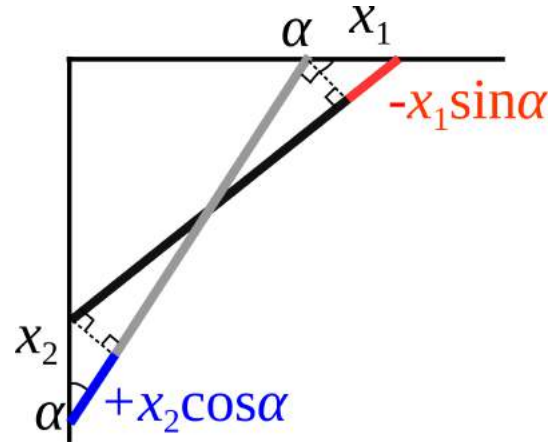


Рис. 7:

Рассмотрим систему через интервал времени  $\tau$  после начала движения. Пусть изменения длин отдельных участков нити равны  $\Delta L$ ,  $\Delta L_1$ ,  $\Delta L_2$ ,  $\Delta L_3$  и  $\Delta H$ , соответственно. При этом условие постоянства длины нити сводится к равенству

$$\Delta S = \Delta L + \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta H = 0. \quad (20)$$

Примем, что за время  $\tau$  груз опускается на величину  $h$ , вагонетка с блоком  $O_1$  смещается влево на  $x_1$ , вагонетка с блоком  $O_2$  опускается на  $x_2$  и, наконец, вагонетка с блоком  $O_3$  сдвигается вправо на  $x_3$ . Очевидно, что в ходе рассматриваемого перемещения длина вертикального участка нити между блоком  $O_1$  и грузом изменится на  $\Delta H = h$ , а длина горизонтального участка от блока  $O_1$  до точки  $X$  увеличится на  $\Delta L = x_1$ . Изменение сторон треугольника  $O_1O_2O_3$  найти несколько сложнее. Для этой цели можно воспользоваться теоремой Пифагора и найти длину каждого из отрезков  $O_1O_2$ ,  $O_2O_3$  и  $O_1O_3$  при произвольных значениях смещений  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Далее, анализируя изменение длин всех отрезков нити с течением времени, можно найти связь положений, скоростей и ускорений всех тел в произвольный момент времени. Это очень сложная задача, которую можно значительно упростить, если ограничиться только нахождением кинематической связи сразу после начала движения, что и требуется для решения. Существенным при этом оказывается тот факт, что все тела в начальный момент времени покоились. Действительно, считая что интервал времени  $\tau$  мал, для смещений груза и вагонеток получаем

$$h \approx \frac{A\tau^2}{2}, \quad x_1 \approx \frac{a_1\tau^2}{2}, \quad x_2 \approx \frac{a_2\tau^2}{2}, \quad x_3 \approx \frac{a_3\tau^2}{2}, \quad (21)$$

где мы пренебрегли изменением ускорений за время  $\tau$ , поскольку учет изменения ускорений дает вклад в смещения следующего порядка малости ( $\tau^3$  и выше). Поясним данную мысль еще раз. При стремлении времени  $\tau$  к нулю в силу того, что начальные скорости тел равны нулю, слагаемые линейные по  $\tau$  в выражениях для смещений тел отсутствуют. При этом коэффициенты при  $\tau^2$  определяют значения ускорений сразу после того, как систему отпустили. Таким образом, для того чтобы найти, например, начальное ускорение блока  $O_1$  необходимо рассмотреть предел, к которому стремится отношение  $2x_1/\tau^2$  при стремлении  $\tau$  к нулю.

Выразим теперь изменение длин сторон треугольника  $O_1O_2O_3$  за время  $\tau$  через  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Искомая кинематическая связь ускорений, выполняющаяся для системы сразу после того, как ее отпускают, может быть получена из предела  $2\Delta S/\tau^2$  при стремлении  $\tau$  к нулю. Таким образом, при расчете изменений длин сторон треугольника достаточно оставлять только слагаемые пропорциональные  $\tau^2$ , вклады более высокого порядка исчезают в пределе. С учетом уравнений (21) это означает, что достаточно рассмотреть только вклады линейные по смещениям вагонеток.

На Рис. 7 показаны два последовательных положения участка нити  $O_1O_2$  (черная и серая линии). Перемещение каждого из концов нити  $O_1$  и  $O_2$  можно разложить на смещение поперек направления нити (это смещение не изменяет длину отрезка) и на смещение вдоль нити (именно оно нам и нужно). Из Рис. 7 видно, что смещение блока  $O_1$  “укорачивает” участок  $O_1O_2$  на  $x_1 \sin \alpha$ . С другой стороны смещение блока  $O_2$

“удлиняет” данный участок на  $x_2 \cos \alpha$ . Итоговое изменение длины участка нити  $O_1O_2$  равно

$$\Delta L_1 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \quad (22)$$

Аналогично для участка нити  $O_2O_3$  можно получить

$$\Delta L_2 = -x_2 \sin \beta + x_3 \cos \beta. \quad (23)$$

Для участка нити  $O_1O_3$  имеем

$$\Delta L_3 = -x_1 \sin \gamma - x_3 \sin \gamma. \quad (24)$$

Наконец, подставив в уравнение (20) изменения длин всех участков, с учетом (21) получаем кинематическую связь для ускорений груза и вагонеток, которая справедлива сразу после того, как систему отпускают

$$a_1(1 - \sin \alpha - \sin \gamma) + a_2(\cos \alpha - \sin \beta) + a_3(\cos \beta - \sin \gamma) + A = 0. \quad (25)$$

Решая уравнение (25) совместно с системой (17)-(19) для ускорения груза можно получить

$$A = \frac{\frac{M}{m}K + \sin \beta - \cos \alpha}{\frac{M}{m}K + 1} g = \frac{2K + \sin \beta - \cos \alpha}{2K + 1} g, \quad (26)$$

где введено обозначение

$$K = (\sin \alpha + \sin \gamma - 1)^2 + (\sin \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \gamma - \cos \beta)^2. \quad (27)$$

Ускорение вагонетки с блоком  $O_1$  можно получить из уравнения (17).

Ответ: Ускорение груза сразу после того, как систему отпускают, дается выражением (26), где коэффициент  $K$  определен в (27). Ускорение вагонетки с блоком  $O_1$  выражается через ускорение груза посредством формулы (17).

# Районный тур 2017/18. 10 класс. II вариант

## Задача 1.

В силу того, что после установления теплового равновесия часть льда осталась в стакане, конечная температура льда, воды и монетки равна  $0^\circ\text{C}$ . Таким образом, температура монетки уменьшилась со значения  $t_0$  до  $0^\circ\text{C}$ , а отданное монеткой тепло пошло на плавление льда. Обозначим массу монетки за  $m$ . Тогда уравнение теплового баланса будет иметь следующий вид:

$$\lambda \Delta M = cmt_0, \quad (28)$$

где  $\Delta M$  — масса расплавленной части льда. Обозначим толщину монетки за  $d$ . Пусть  $h$  — это высота поверхности воды в конечном состоянии по отношению к исходному уровню поверхности льда. Величина  $h$  складывается из трех слагаемых. Во-первых, наличие монетки увеличивает уровень воды на  $d$ . Во-вторых, сам слой воды имеет толщину  $\Delta M/(\rho_{\text{в}}S)$ , где  $S$  — площадь сечения стакана. Наконец, плавление льда приводит к уменьшению толщины его слоя на величину  $\Delta M/(\rho_{\text{л}}S)$  (этот вклад следует взять с отрицательным знаком). Таким образом, имеем следующее соотношение:

$$h = d + \frac{\Delta M}{S} \left( \frac{1}{\rho_{\text{в}}} - \frac{1}{\rho_{\text{л}}} \right). \quad (29)$$

Рассмотрим отношение  $\Delta M/S$ . Подставим в него значение  $\Delta M$ , взятое из уравнения (28), и домножив числитель и знаменатель на  $d$ , воспользуемся определением плотности  $\rho_{\text{м}} = m/V = m/(Sd)$ :

$$\frac{\Delta M}{S} = \frac{cmt_0}{\lambda S} = \frac{ct_0 d m}{\lambda S d} = \frac{c\rho_{\text{м}} t_0 d}{\lambda}. \quad (30)$$

Тогда для относительной величины  $h/d$  получаем следующее выражение:

$$\frac{h}{d} = 1 + \frac{c\rho_{\text{м}} t_0}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_{\text{в}}} - \frac{1}{\rho_{\text{л}}} \right). \quad (31)$$

Заметим, что величина в скобках отрицательна, т. к.  $\rho_{\text{в}} > \rho_{\text{л}}$ . Выражая из уравнения (31) начальную температуру  $t_0$  и подставляя числовые значения, получаем  $t_0 \approx 40,4^\circ\text{C}$ .

Ответ: Начальная температура монетки  $t_0 \approx 40,4^\circ\text{C}$ .

## Задача 2.

Рассмотрим процесс “выбрасывания” акробата с платформы А. Обозначим массу одной платформы через  $m$ , искомую массу акробата через  $M$ . Через  $u$  обозначим линейную скорость вращения платформ после срабатывания пружины. Отметим, что в силу симметричного расположения платформ относительно точки О, моменты сил тяжести, действующих на них уравновешены. В результате, качели вращаются равномерно. Обозначим через  $v_y$  и  $v_x$  проекции начальной скорости акробата (в неподвижной системе отсчета) на вертикальную и горизонтальную оси, соответственно. Система координат ориентирована так, как показано на Рис. 8, начало координат помещено в точку, где изначально располагался акробат. Поскольку в момент прыжка на систему не действуют внешних сил в горизонтальном направлении, можно выписать закон сохранения импульса

$$2mu = Mv_x, \quad (32)$$

где учтено, что вращаться начинают обе платформы качелей. Данный результат можно получить также, рассмотрев закон сохранения момента импульса относительно точки О. Кроме того, поскольку в процессе “выбрасывания” акробата на систему не действуют внешние силы, совершающие работу, приходим к выводу, что выполняется закон сохранения энергии

$$E = mu^2 + \frac{M}{2}(v_x^2 + v_y^2). \quad (33)$$

Поймем теперь, к каким следствиям приводит тот факт, что акробат, будучи в верхней точке своей траектории, приземляется в точности на платформу В качелей, повернувшихся таким образом, что стержень АВ

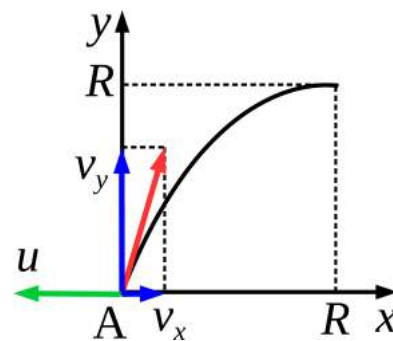


Рис. 8:

горизонтален. Обозначим время полета через  $t$ . За время полета акробат смещается направо на расстояние  $R$  и поднимается вверх на высоту  $R$ :

$$R = v_x t, \quad R = v_y t - \frac{gt^2}{2}. \quad (34)$$

Тот факт, что точка приземления есть верхняя точка траектории означает, что его вертикальная скорость обращается в этот момент в ноль

$$0 = v_y - gt. \quad (35)$$

Наконец, за время полета акробата качели должны повернуться на угол  $\pi/2 + 2\pi n$ , где  $n$  — натуральное число. Таким образом,

$$ut = \pi \left( \frac{1}{2} + 2n \right) R. \quad (36)$$

Собирая все полученные уравнения вместе, приходим к выражению

$$E = \frac{MgR}{4} \left[ 5 + \pi \left( \frac{1}{2} + n \right) \right]. \quad (37)$$

Окончательно, для массы акробата имеем

$$M = \frac{4E}{gR[5 + \pi(1/2 + 2n)]}. \quad (38)$$

Ответ: Выражение для массы акробата приведено в (38),  $n$  — натуральное число.

### Задача 3.

В условии задачи было выбрано неудачное обозначение для длины круговой дороги. Ниже мы будем обозначать длину буквой  $L$ , а радиус — буквой  $R$  ( $L = 2\pi R$ ).

Рассмотрим произвольный момент времени, в который угловое расстояние между автомобилями равно  $\varphi$ . В этот момент угол между векторами скоростей  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  также равен  $\varphi$ . Рассмотрим разность скоростей  $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  (см. Рис. 9). По теореме косинусов имеем:

$$|\vec{u}|^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi, \quad (39)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — модули соответствующих векторов (будем для определенности считать, что  $v_1 > v_2$ ). Выражение (39) задает квадрат относительной скорости. С учетом того, что угол  $\varphi$  изменяется со временем по закону  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ , где  $\omega = (v_1 - v_2)/R$ , легко видеть, что модуль относительной скорости является периодической функцией времени с периодом  $T = 2\pi/\omega = L/(v_1 - v_2)$ . При этом максимальное и минимальное значения модуля относительной скорости равны  $v_1 + v_2$  и  $v_1 - v_2$ , соответственно. Данные утверждения могут быть доказаны и без вывода явного выражения (39).

По графику легко определить величину  $T$ , а следом и разность  $v_1 - v_2$ . Действительно, разность моментов времени, отвечающих максимуму и минимуму, равна  $95 \text{ с} - 5 \text{ с} = 90 \text{ с}$  (это составляет половину периода). Таким образом,  $v_1 - v_2 = L/T = (360 \text{ м})/(2 \cdot 90 \text{ с}) = 2 \text{ м/с}$ . Зная разность модулей скоростей, мы теперь можем отмасштабировать ось ординат. Например, отношение  $v_1 + v_2$  к  $v_1 - v_2$  может быть легко найдено по клеточкам:  $(v_1 + v_2)/(v_1 - v_2) = 26/2$ . Отсюда сумма модулей скоростей  $v_1 + v_2 = 26 \text{ м/с}$ . Зная сумму и разность скоростей автомобилей, легко установить, что  $v_1 = 14 \text{ м/с}$  и  $v_2 = 12 \text{ м/с}$ .

Ответ: Модули скоростей автомобилей равны  $14 \text{ м/с}$  и  $12 \text{ м/с}$ .

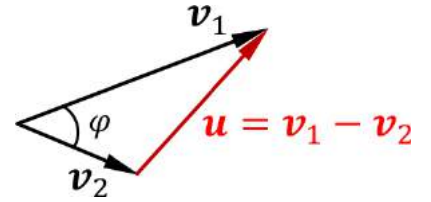


Рис. 9:



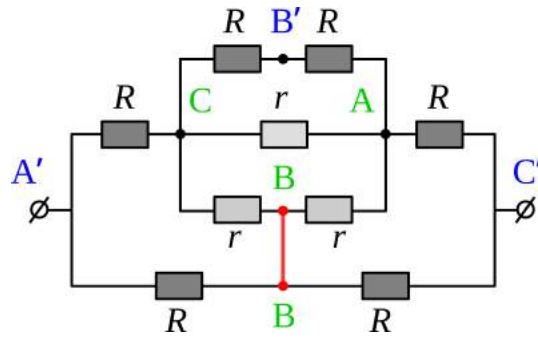


Рис. 10:

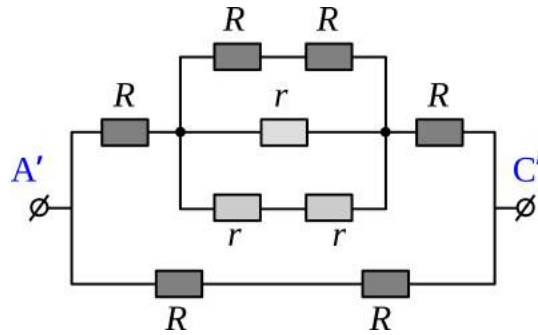


Рис. 11:

**Задача 4.**

Обозначим сопротивление стороны малого треугольника ABC через  $r$ , а стороны большого треугольника  $A'B'C'$  через  $2R$ . Коэффициент 2 введен для удобства: сторона треугольника  $A'B'C'$  в два раза больше стороны треугольника ABC. Ясно, что когда Миша измерял сопротивление в первый раз (между точками A и C), он получил значение

$$R_{AC} = \frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2}{3}r. \quad (40)$$

Действительно, участок  $A - B - C$  имеет сопротивление  $2r$  и он соединен параллельно с участком AC.

Рассмотрим внимательно схему, которая получилась у Миши, после того, как он припаял второй треугольник  $A'B'C'$ . Эквивалентная схема изображена на Рис. 10. Любой узел в электрической схеме можно “растянуть”, вставив соединение с нулевым сопротивлением. Для удобства данная процедура проделана для узла B, поэтому он изображен на эквивалентной схеме два раза. В силу симметрии ток не течет по соединительному проводу BB, выделенному красным цветом. Следовательно, этот соединительный провод можно просто убрать из схемы, при этом распределение токов не изменится. Окончательная эквивалентная схема изображена на Рис. 11. Сопротивление между точками  $A'$  и  $C'$  равно

$$R_{A'C'} = 2R \frac{3R + 2r}{6R + 3r}. \quad (41)$$

Приравняв сопротивления  $R_{AC}$  и  $R_{A'C'}$ , в результате получим, что

$$r = \sqrt{3}R. \quad (42)$$

Обозначим длину стороны треугольника ABC через  $l$ . Пусть  $S$  — площадь поперечного сечения обеих проволок. Наконец, пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  есть удельные сопротивление материалов, из которых сделаны первая и вторая проволоки, соответственно. Тогда

$$\frac{\rho_1 l}{S} = \sqrt{3} \frac{\rho_2 l}{S} \Leftrightarrow \rho_1 = \sqrt{3} \rho_2. \quad (43)$$

Ответ: Удельное сопротивление проволоки ABC в  $\sqrt{3}$  раз больше, чем удельное сопротивление проволоки  $A'B'C'$ .

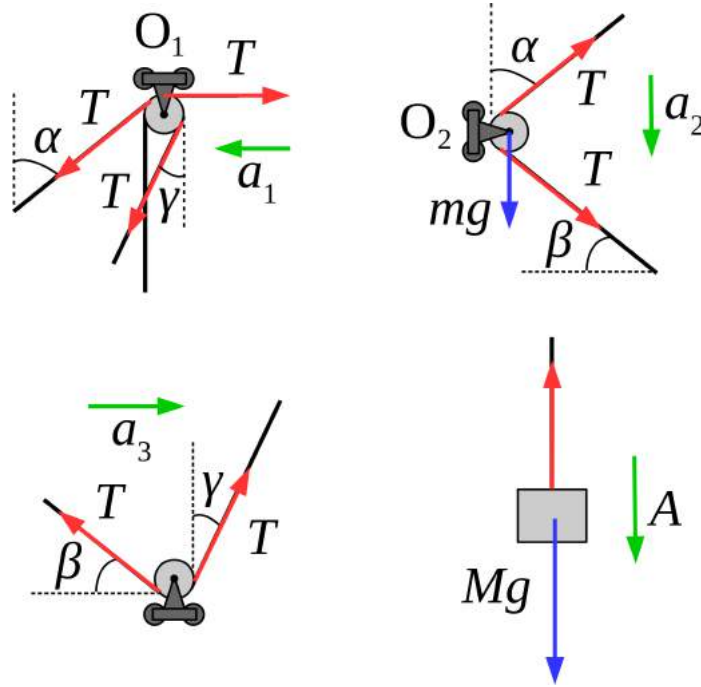


Рис. 12:

### Задача 5.

Обозначим ускорение груза через  $A$ , ускорения вагонеток с блоками  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  через  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , соответственно. Для определенности будем считать, что груз и блок  $O_2$  опускаются, блок  $O_1$  смещается влево, а блок  $O_3$  двигается вправо. Если данное предположение ошибочно, то в результате будут получены отрицательные значения ускорений. Если ускорение отрицательно, это означает, что соответствующее тело начинает смещаться в противоположном направлении.

На Рис. 12 показаны все силы, которые приложены к грузу и вагонеткам с блоками сразу после того, как систему отпускают, и которые имеют ненулевую проекцию на направление движения рассматриваемых тел. Выпишем второй закон Ньютона для груза и вагонеток в проекции на направление их движения

$$\begin{aligned} ma_1 &= T(\sin \alpha + \sin \gamma - 1), \\ ma_2 &= T(\sin \beta - \cos \alpha) + mg, \\ ma_3 &= T(\sin \gamma - \cos \beta), \\ MA &= Mg - T. \end{aligned}$$

Сразу исключим из этой системы силу натяжения нити  $T = M(g - A)$ :

$$a_1 = \frac{M}{m}(g - A)(\sin \alpha + \sin \gamma - 1), \quad (44)$$

$$a_2 = \frac{M}{m}(g - A)(\sin \beta - \cos \alpha) + mg, \quad (45)$$

$$a_3 = \frac{M}{m}(g - A)(\sin \gamma - \cos \beta). \quad (46)$$

Данная система трех уравнений содержит четыре неизвестных: ускорения  $A$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ . Чтобы эту систему можно было решить, необходимо дополнить ее кинематической связью ускорений всех тел. Действительно, смещения груза и вагонеток не являются независимыми: они оказываются связанными в силу наличия нити, охватывающей все блоки.

Поскольку по условию нить нерастяжимая, кинематическую связь ускорений можно получить, рассмотрев условие постоянства длины нити. Обозначим длины отдельных участков нити так, как это показано на Рис. 13. Таким образом полная длина нити равна

$$S = L + L_1 + L_2 + L_3 + H.$$

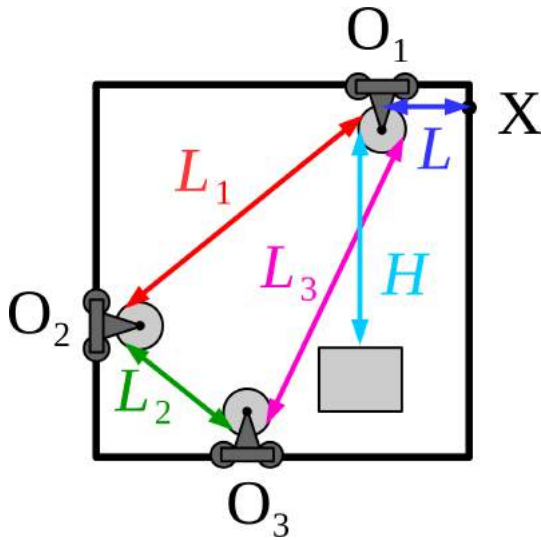


Рис. 13:

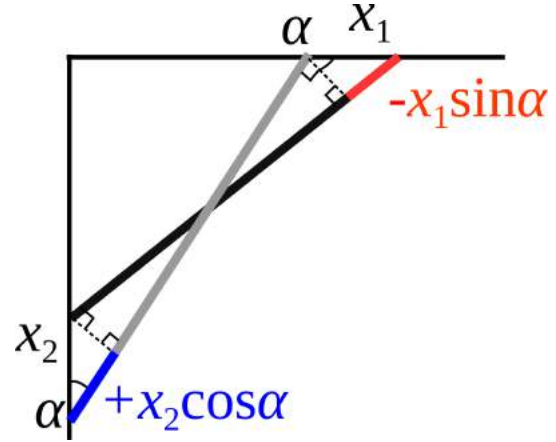


Рис. 14:

Рассмотрим систему через интервал времени  $\tau$  после начала движения. Пусть изменения длин отдельных участков нити равны  $\Delta L$ ,  $\Delta L_1$ ,  $\Delta L_2$ ,  $\Delta L_3$  и  $\Delta H$ , соответственно. При этом условие постоянства длины нити сводится к равенству

$$\Delta S = \Delta L + \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta H = 0. \quad (47)$$

Примем, что за время  $\tau$  груз опускается на величину  $h$ , вагонетка с блоком  $O_1$  смещается влево на  $x_1$ , вагонетка с блоком  $O_2$  опускается на  $x_2$  и, наконец, вагонетка с блоком  $O_3$  сдвигается вправо на  $x_3$ . Очевидно, что в ходе рассматриваемого перемещения длина вертикального участка нити между блоком  $O_1$  и грузом изменится на  $\Delta H = h$ , а длина горизонтального участка от блока  $O_1$  до точки  $X$  увеличится на  $\Delta L = x_1$ . Изменение сторон треугольника  $O_1O_2O_3$  найти несколько сложнее. Для этой цели можно воспользоваться теоремой Пифагора и найти длину каждого из отрезков  $O_1O_2$ ,  $O_2O_3$  и  $O_1O_3$  при произвольных значениях смещений  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Далее, анализируя изменение длин всех отрезков нити с течением времени, можно найти связь положений, скоростей и ускорений всех тел в произвольный момент времени. Это очень сложная задача, которую можно значительно упростить, если ограничиться только нахождением кинематической связи сразу после начала движения, что и требуется для решения. Существенным при этом оказывается тот факт, что все тела в начальный момент времени покоились. Действительно, считая что интервал времени  $\tau$  мал, для смещений груза и вагонеток получаем

$$h \approx \frac{A\tau^2}{2}, \quad x_1 \approx \frac{a_1\tau^2}{2}, \quad x_2 \approx \frac{a_2\tau^2}{2}, \quad x_3 \approx \frac{a_3\tau^2}{2}, \quad (48)$$

где мы пренебрегли изменением ускорений за время  $\tau$ , поскольку учет изменения ускорений дает вклад в смещения следующего порядка малости ( $\tau^3$  и выше). Поясним данную мысль еще раз. При стремлении времени  $\tau$  к нулю в силу того, что начальные скорости тел равны нулю, слагаемые линейные по  $\tau$  в выражениях для смещений тел отсутствуют. При этом коэффициенты при  $\tau^2$  определяют значения ускорений сразу после того, как систему отпустили. Таким образом, для того чтобы найти, например, начальное ускорение блока  $O_1$  необходимо рассмотреть предел, к которому стремится отношение  $2x_1/\tau^2$  при стремлении  $\tau$  к нулю.

Выразим теперь изменение длин сторон треугольника  $O_1O_2O_3$  за время  $\tau$  через  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Искомая кинематическая связь ускорений, выполняющаяся для системы сразу после того, как ее отпускают, может быть получена из предела  $2\Delta S/\tau^2$  при стремлении  $\tau$  к нулю. Таким образом, при расчете изменений длин сторон треугольника достаточно оставлять только слагаемые пропорциональные  $\tau^2$ , вклады более высокого порядка исчезают в пределе. С учетом уравнений (48) это означает, что достаточно рассмотреть только вклады линейные по смещениям вагонеток.

На Рис. 14 показаны два последовательных положения участка нити  $O_1O_2$  (черная и серая линии). Перемещение каждого из концов нити  $O_1$  и  $O_2$  можно разложить на смещение поперек направления нити (это смещение не изменяет длину отрезка) и на смещение вдоль нити (именно оно нам и нужно). Из Рис. 14 видно, что смещение блока  $O_1$  “укорачивает” участок  $O_1O_2$  на  $x_1 \sin \alpha$ . С другой стороны смещение блока  $O_2$

“удлиняет” данный участок на  $x_2 \cos \alpha$ . Итоговое изменение длины участка нити  $O_1O_2$  равно

$$\Delta L_1 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \quad (49)$$

Аналогично для участка нити  $O_2O_3$  можно получить

$$\Delta L_2 = -x_2 \sin \beta + x_3 \cos \beta. \quad (50)$$

Для участка нити  $O_1O_3$  имеем

$$\Delta L_3 = -x_1 \sin \gamma - x_3 \sin \gamma. \quad (51)$$

Наконец, подставив в уравнение (47) изменения длин всех участков, с учетом (48) получаем кинематическую связь для ускорений груза и вагонеток, которая справедлива сразу после того, как систему отпускают

$$a_1(1 - \sin \alpha - \sin \gamma) + a_2(\cos \alpha - \sin \beta) + a_3(\cos \beta - \sin \gamma) + A = 0. \quad (52)$$

Решая уравнение (52) совместно с системой (44)-(46) для ускорения груза можно получить

$$A = \frac{\frac{M}{m}K + \sin \beta - \cos \alpha}{\frac{M}{m}K + 1} g = \frac{3K + \sin \beta - \cos \alpha}{3K + 1} g, \quad (53)$$

где введено обозначение

$$K = (\sin \alpha + \sin \gamma - 1)^2 + (\sin \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \gamma - \cos \beta)^2. \quad (54)$$

Ускорение вагонетки с блоком  $O_3$  можно получить из уравнения (46).

Ответ: Ускорение груза сразу после того, как систему отпускают, дается выражением (53), где коэффициент  $K$  определен в (54). Ускорение вагонетки с блоком  $O_3$  выражается через ускорение груза посредством формулы (46).