Возможные решения задач. 7 класс

Вариант 1

Задача 1. Шестеренки

Известно, что велосипедист всегда крутит педали одинаково. Тогда шестеренка, соединенная с педалями (правая на рисунке), совершает неизменное число ν_1 оборотов в минуту. Найдем, сколько при этом оборотов в минуту будет совершать левая шестеренка.

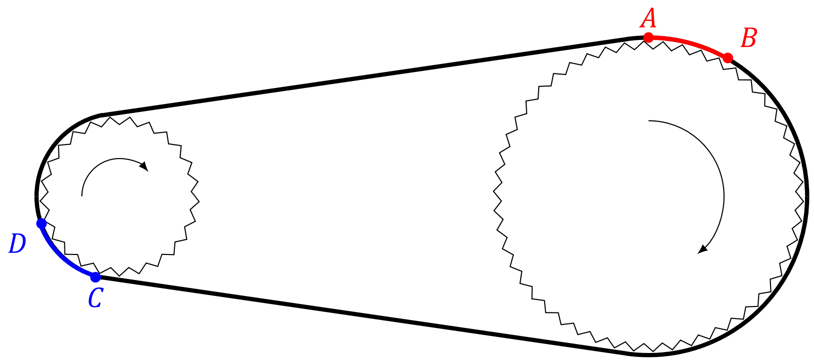

Рис. 1: Велосипедная цепь, связывающая вращения шестеренок.

Обозначим количество зубчиков на правой шестеренке n_1, а на левой n_2. Пускай правая шестеренка повернулась на некоторое число n зубчиков, совершив при этом часть оборота, равную n/n_1. Тогда цепь прошла отрезок AB, длина которого равна n зубчиков. Так как цепь не рвется и не растягивается, все ее точки перемещаются вдоль цепи на расстояние, равное длине участка AB. Тогда точка C перешла в точку D, причем длина CD равна длине AB. Значит левая шестеренка совершит часть оборота, равную n/n_2. Ясно, что скорость велосипеда прямо пропорциональна числу оборотов колес за единицу времени, которое равно числу оборотов ν_2 левой шестеренки. Его можно выразить из следующих формул

$$\nu_1 = \frac{n}{n_1}\frac{1}{t}, \tag{1}$$

$$\nu_2 = \frac{n}{n_2}\frac{1}{t} = \nu_1\frac{n_1}{n_2}, \tag{2}$$

откуда видно, что максимальное значение ν_2 получется при выборе максимального отношения n_1/n_2, а минимальное — при минимальном. Из представленного набора шестеренок

$$\max\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{50}{10}, \quad \text{а} \quad \min\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{36}{27}. \tag{3}$$

В задаче требуется, чтобы эти значения не поменялись, следовательно можно составить два равенства, из которых найти размеры самой большой и самой маленькой шестеренок

$$\frac{50}{10} = \frac{40}{x}, \quad \Rightarrow \quad x = 8, \tag{4}$$

$$\frac{36}{27} = \frac{40}{y}, \quad \Rightarrow \quad y = 30. \tag{5}$$

Ответ: 8 и 30.

Задача 2. Секундомер

Возможное решение номер 1

Стрелка на секундомере за время t перемещается на некоторый угол в указанном направлении. В общем случае за отведенное время стрелка может совершить n оборотов и еще пройти часть круга. Именно на эту часть круга будут отличаться начальное и конечное положение стрелки. Причем за любые равные промежутки времени сдвиг стрелки будет одинаков.

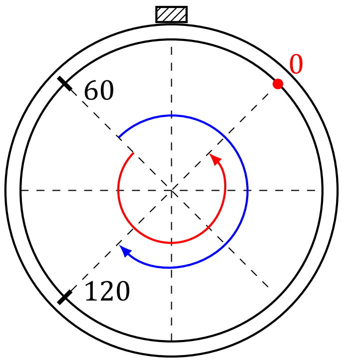

Рис. 2: Перемещение стрелки секундомера.

Рассмотрим движение стрелки на промежутке от 60 до 120 секунд. Стрелка переместилась на 6 секторов по направлению вращения (или на два сектора против). Такое же перемещение будет у стрелки за любой другой промежуток времени, продолжительностью 60 секунд, в том числе за промежуток от 0 до 60 секунд. Тогда положение нуля можно найти, отсчитав на циферблате 6 секторов от точки 60 против направления часовой стрелки (или 2 по направлению).

<u>Ответ:</u> смотри рисунок.

Возможное решение номер 2

Рассмотрим два момента времени 60 с $+ \Delta t$ и 60 с $- \Delta t$. Точки соответствующие положениям стрелки в эти моменты времени будут симметричны относительно линии, проходящей через отметку 60 и центр циферблата. Если в качестве Δt выбрать 60 с, то одна из точек совпадет с отметкой 120, а другая с потерянным 0.

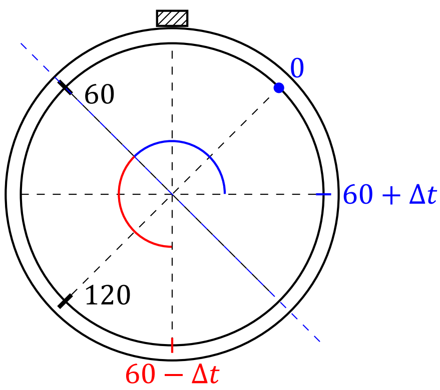

Рис. 3: Перемещение стрелки секундомера.

<u>Ответ:</u> смотри рисунок.

Задача 3. Дима и Вова

Решение без чисел

Введем обозначения: L — расстояние от Димы до самолета, l — расстояние между друзьями в начальный момент, v_1 — скорость Димы, v_2 — Вовы, τ — время, которое Вова тратит на поднятие монеты.

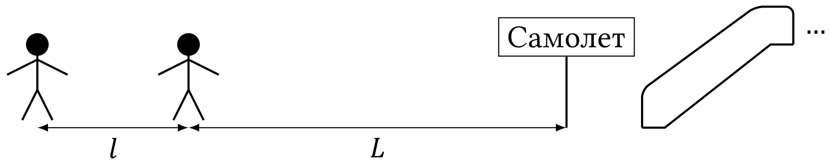

Рис. 4: Начальное положение Вовы и Димы.

Ясно, что путешествие до самолета займет у Вовы меньше времени, чем у Димы, если он не будет подбирать монеты. Тогда, чтобы поднять как можно больше монет, Вова должен все «свободное» время, равное разности времен чистого движения, тратить на их поднятие, и в итоге прийти одновременно с Димой. Пусть таким образом он собрал n монет. В таком случае можно написать два равенства

$$v_1 t = L, \tag{6}$$

$$v_2(t - n\tau) = L + l, \tag{7}$$

где t — время, за которое Дима дойдет до самолета. Выражая время из первого и подставляя во второе получим, раскрыв скобки,

$$\frac{v_2}{v_1}L - v_2 n\tau = L + l, \tag{8}$$

откуда несложно выразить n

$$n = \frac{\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)L - l}{v_2\tau}. \tag{9}$$

Теперь единственное, что осталось, — подставить числа в формулу

$$n = \frac{(1{,}5 - 1)\ 1000\ \text{м} - 200\ \text{м}}{1{,}5\ \text{м/с}\ 2\ \text{с}} = 100\ \text{шт.} \tag{10}$$

Ответ: 100 шт.

Решение с числами

Ход решения такой же, как выше, но в процессе написания формульных выражений сразу производится подстановка чисел. Тогда из формулы (6) можно вычислить $t = 1000$ с. Вове нужно пройти расстояние, на l большее, тогда по той же формуле можно найти время $t' = 800$ с. Ясно, что Вова должен все время $t - t' = 200$ с на поднятие монет, и тогда успеет поднять ровно $n = \frac{t'-t}{\tau} = 100$ монет.

Ответ: 100 шт.

Задача 4. Степан

Рассмотрим два тела одинаковой формы, одно из которых в несколько раз больше другого. Понятно, что оба этих тела можно описать одним параметром, который отвечает за их размер и имеет размерность длины. Такую величину называют характерной длиной или характерным линейным размером. Так, для кубика в качестве характерной длины можно взять, например, длину ребра, а можно длину главной диагонали. И то, и другое, однозначно определит фигуру.

Пускай мы выбрали некоторый параметр l. И объём, и площадь тела выражаются через него (фигура задана однозначно). Объём измеряется в м^3, значит он должен быть пропорционален третьей степени характерной длины. Аналогичным образом площадь пропорциональна второй степени l. Подчеркнём, что коэффициент в этой зависимости свой для каждого выбора параметра l. Так, если в качестве характерной длины кубика взять длину его ребра, коэффициент будет равен 1, а если половину длины ребра то 8.

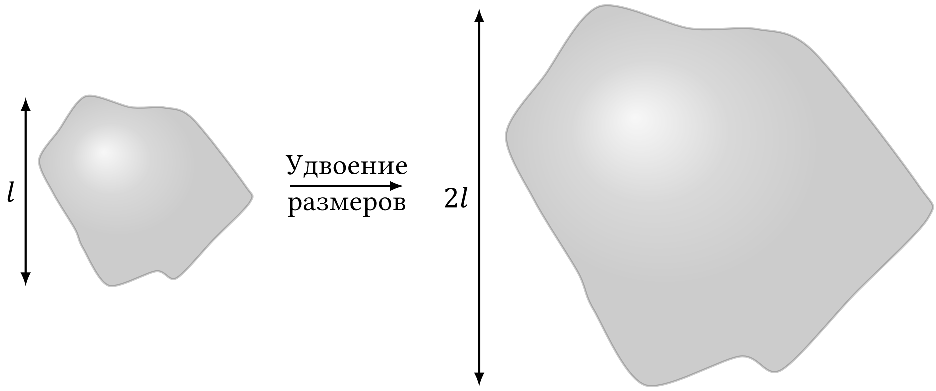

Рис. 5: Изменение тела при удвоении характерной длины.

Перейдём к решению задачи. Раз объём новых коробок в 8 раз меньше объёма старых. Объём пропорционален кубу характерной длины, значит сама длина, изменилась в 2 раза. То есть характерный размер новой коробки в 2 раза меньше характерного размера старой. Поэтому площадь материала, необходимого для изготовления новой коробки, уменьшилась в 4 раза.

Таким образом, на изготовление новой коробки уходит в 4 раза меньше материала. Значит, если раньше затраты на одну коробку были равны x, то теперь они будут

$$x \to \frac{x}{4}\,. \tag{11}$$

Однако теперь для такого же объёма сока потребуется не одна коробка, а 8. Значит затраты материала на производство 2 литров сока, станут равны

$$8 \cdot \frac{x}{4} = 2x\,. \tag{12}$$

<u>Ответ:</u> затраты на производство увеличатся вдвое.

Задача 5. Ковбой Джо

После начала движения ковбой движется с постоянной скоростью. Тогда его закон движения можно изобразить на графике прямой линией, задаваемой уравнением

$$S = 30\ \text{км/ч} \cdot (t - t_0)\,. \tag{13}$$

Наклон прямой определяется скоростью, а время t_0 равно задержке между отправлением ковбоя и поезда. Нас интересует максимально большая задержка, при которой ковбой догонит поезд. Значит нам нужно построить прямую с заданным коэффициентом наклона и пересекающую ось t как можно правее. Для этого можно построить несколько параллельных прямых (A), увеличивая значение t_0, пока не пропадет пересечение с кривой (B), задающей движение поезда. Для этого можно строить прямые с определенным шагом, например в одну клетку, и найти наибольшее значение задержки, при котором еще будет пересечение.

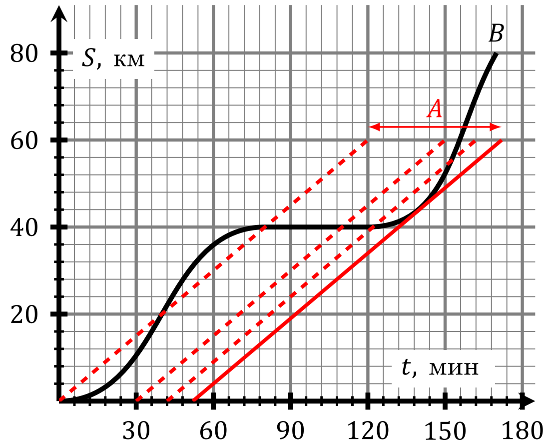

Рис. 6: Пример построения набора прямых (пунктиром) и прямая, решающая задачу (сплошная линия).

Ответ: ≈ 54 мин.

Вариант 2

Задача 1. Шестеренки

Известно, что велосипедист всегда крутит педали одинаково. Тогда шестеренка, соединенная с педалями (правая на рисунке), совершает неизменное число ν_1 оборотов в минуту. Найдем, сколько при этом оборотов в минуту будет совершать левая шестеренка.

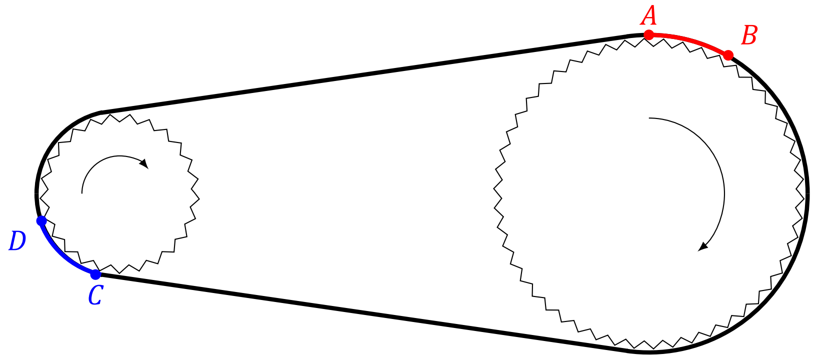

Рис. 7: Велосипедная цепь, связывающая вращения шестеренок.

Обозначим количество зубчиков на правой шестеренке n_1, а на левой n_2. Пускай правая шестеренка повернулась на некоторое число n зубчиков, совершив при этом часть оборота, равную n/n_1. Тогда цепь прошла отрезок AB, длина которого равна n зубчиков. Так как цепь не рвется и не растягивается, все ее точки перемещаются вдоль цепи на расстояние, равное длине участка AB. Тогда точка C перешла в точку D, причем длина CD равна длине AB. Значит левая шестеренка совершит часть оборота, равную n/n_2. Ясно, что скорость велосипеда прямо пропорциональна числу оборотов колес за единицу времени, которое равно числу оборотов ν_2 левой шестеренки. Его можно выразить из следующих формул

$$\nu_1 = \frac{n}{n_1}\frac{1}{t}, \tag{1}$$

$$\nu_2 = \frac{n}{n_2}\frac{1}{t} = \nu_1\frac{n_1}{n_2}, \tag{2}$$

откуда видно, что максимальное значение ν_2 получается при выборе максимального отношения n_1/n_2, а минимальное — при минимальном. Из представленного набора шестеренок

$$\max\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{55}{11}, \quad \text{а} \quad \min\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{32}{24}. \tag{3}$$

В задаче требуется, чтобы эти значения не поменялись, следовательно можно составить два равенства, из которых найти размеры самой большой и самой маленькой шестеренок

$$\frac{55}{11} = \frac{40}{x}, \quad \Rightarrow \quad x = 8, \tag{4}$$

$$\frac{32}{24} = \frac{40}{y}, \quad \Rightarrow \quad y = 30. \tag{5}$$

<u>Ответ:</u> 8 и 30.

Задача 2. Секундомер

Возможное решение номер 1

Стрелка на секундомере за время t перемещается на некоторый угол в указанном направлении. В общем случае за отведенное время стрелка может совершить n оборотов и еще пройти часть круга. Именно на эту часть круга будут отличаться начальное и конечное положение стрелки. Причем за любые равные промежутки времени сдвиг стрелки будет одинаков.

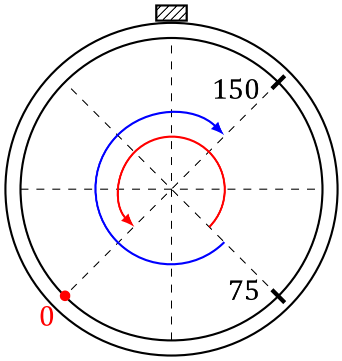

Рис. 8: Перемещение стрелки секундомера.

Рассмотрим движение стрелки на промежутке от 75 до 150 секунд. Стрелка переместилась на 6 секторов по направлению вращения (или на два сектора против). Такое же перемещение будет у стрелки за любой другой промежуток времени, продолжительностью 75 секунд, в том числе за промежуток от 0 до 75 секунд. Тогда положение нуля можно найти, отсчитав на циферблате 6 секторов от точки 60 против направления часовой стрелки (или 2 по направлению).

Ответ: смотри рисунок.

Возможное решение номер 2

Рассмотрим два момента времени 75 с + Δt и 75 с − Δt. Точки соответствующие положениям стрелки в эти моменты времени будут симметричны относительно линии, проходящей через отметку 75 и центр циферблата. Если в качестве Δt выбрать 75 с, то одна из точек совпадет с отметкой 150, а другая с потерянным 0.

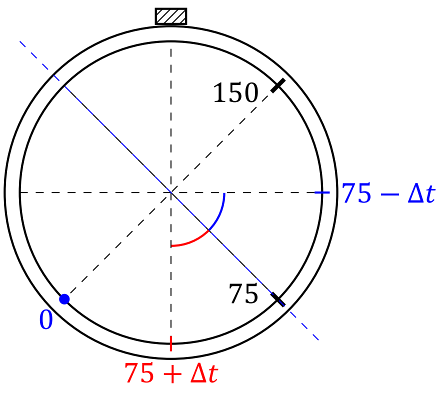

Рис. 9: Перемещение стрелки секундомера.

Ответ: смотри рисунок.

Задача 3. Дима и Вова

Решение без чисел

Введем обозначения: L — расстояние от Димы до самолета, l — расстояние между друзьями в начальный момент, v_1 — скорость Димы, v_2 — Вовы, τ — время, которое Вова тратит на поднятие монеты.

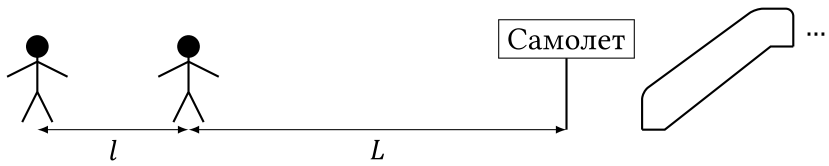

Рис. 10: Начальное положение Вовы и Димы.

Ясно, что путешествие до самолета займет у Вовы меньше времени, чем у Димы, если он не будет подбирать монеты. Тогда, чтобы поднять как можно больше монет, Вова должен все «свободное» время, равное разности времен чистого движения, тратить на их поднятие, и в итоге прийти одновременно с Димой. Пусть таким образом он собрал n монет. В таком случае можно написать два равенства

$$v_1 t = L, \tag{6}$$

$$v_2(t - n\tau) = L + l, \tag{7}$$

где t — время, за которое Дима дойдет до самолета. Выражая время из первого и подставляя во второе получим, раскрыв скобки,

$$\frac{v_2}{v_1}L - v_2 n\tau = L + l, \tag{8}$$

откуда несложно выразить n

$$n = \frac{\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)L - l}{v_2\tau}. \tag{9}$$

Теперь единственное, что осталось, — подставить числа в формулу

$$n = \frac{(1{,}25 - 1)\ 800\ \text{м} - 100\ \text{м}}{2{,}5\ \text{м/с}\ 1\ \text{с}} = 40\ \text{шт.} \tag{10}$$

Ответ: 40 шт.

Решение с числами

Ход решения такой же, как выше, но в процессе написания формульных выражений сразу производится подстановка чисел. Тогда из формулы (6) можно вычислить $t = 400$ с. Вове нужно пройти расстояние, на l большее, тогда по той же формуле можно найти время $t' = 360$ с. Ясно, что Вова должен все время $t - t' = 40$ с на поднятие монет, и тогда успеет поднять ровно $n = \frac{t'-t}{\tau} = 40$ монет.

Ответ: 40 шт.

Задача 4. Степан

Рассмотрим два тела одинаковой формы, одно из которых в несколько раз больше другого. Понятно, что оба этих тела можно описать одним параметром, который отвечает за их размер и имеет размерность длины. Такую величину называют характерной длиной или характерным линейным размером. Так, для кубика в качестве характерной длины можно взять, например, длину ребра, а можно длину главной диагонали. И то, и другое, однозначно определит фигуру.

Пускай мы выбрали некоторый параметр l. И объём, и площадь тела выражаются через него (фигура задана однозначно). Объём измеряется в м^3, значит он должен быть пропорционален третьей степени характерной длины. Аналогичным образом площадь пропорциональна второй степени l. Подчеркнём, что коэффициент в этой зависимости свой для каждого выбора параметра l. Так, если в качестве характерной длины кубика взять длину его ребра, коэффициент будет равен 1, а если половину длины ребра то 8.

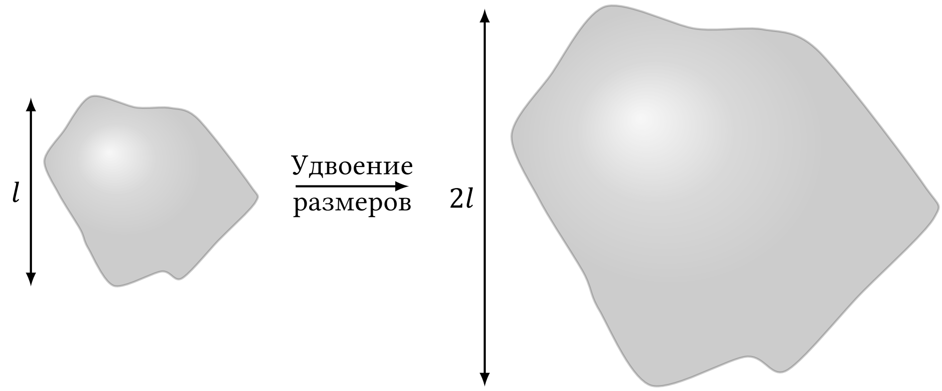

Рис. 11: Изменение тела при удвоении характерной длины.

Перейдём к решению задачи. Раз объём новых коробок в 8 раз больше объёма старых. Объём пропорционален кубу характерной длины, значит сама длина, изменилась в 2 раза. То есть характерный размер новой коробки в 2 раза больше характерного размера старой. Поэтому площадь материала, необходимого для изготовления новой коробки, увеличилась в 4 раза.

Таким образом, на изготовление новой коробки уходит в 4 раза больше материала. Значит, если раньше затраты на одну коробку были равны x, то теперь они будут

$$x \to 4x \,. \tag{11}$$

Однако теперь для такого же объёма сока потребуется в 8 раз меньше коробок. Значит затраты материала на производство 4 литров сока, потребуется

$$4 \cdot \frac{x}{8} = \frac{x}{2} \,. \tag{12}$$

Ответ: затраты на производство уменьшатся вдвое.

Задача 5. Ковбой Джо

После начала движения ковбой движется с постоянной скоростью. Тогда его закон движения можно изобразить на графике прямой линией, задаваемой уравнением

$$S = 26\ \text{км/ч} \cdot t - S_0. \tag{13}$$

Наклон прямой определяется скоростью, а расстояние S_0 равно начальному расстоянию между ковбоем и поездом. Нас интересует максимально большое расстояние, при которой ковбой догонит поезд. Значит нам нужно построить прямую с заданным коэффициентом наклона и пересекающую ось S как можно ниже. Для этого можно построить несколько параллельных прямых (A), увеличивая значение S_0, пока не пропадет пересечение с кривой (B), задающей движение поезда. Для этого можно строить прямые с определенным шагом, например в одну клетку, и найти наибольшее значение расстояния, при котором еще будет пересечение.

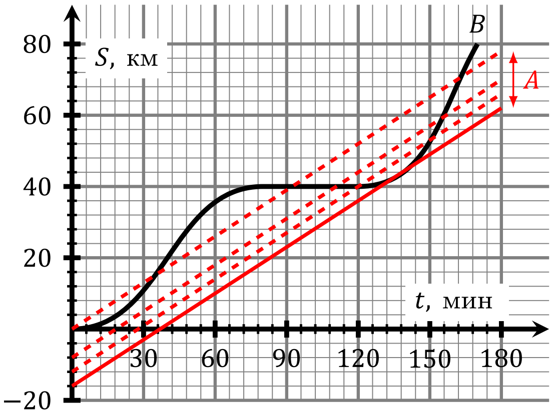

Рис. 12: Пример построения набора прямых (пунктиром) и прямая, решающая задачу (сплошная линия).

<u>**Ответ:**</u> ≈ 16 км.