Возможные решения задач. 9 класс

Вариант 1

Задача 1. Северный ветер

Возможно несколько способов решения данной задачи. В любом случае требуется получить из графика данного в условии (Рис. 1) зависимость скорости шара V_X от времени t прошедшего с начала снижения (скорость шара направлена на юг). График такой зависимости приведен на Рис. 2. Чтобы получить эту зависимость, необходимо сделать два утверждения:

- так как скорость снижения постоянна, то снижение на фиксированную величину ΔH всегда соответствует одному и тому же отрезку времени Δt. Таким образом, график зависимости $V_X(t)$ будет состоять из двух частей — равномерного замедления и движения с постоянной скоростью;
- для определения масштаба следует отметить, что $\Delta H/\Delta t = U$, где U = 0,5 м/с это скорость снижения, данная в условии.

Более формально то же можно выразить на языке функций, если обозначить данную в условии скорость ветра, как функцию $V_{\text{ветра}}(H)$. Тогда, учитывая равномерность движения вдоль вертикальной оси, можно записать $V_X(t) = V_{\text{ветра}}(H_0 - Ut)$, где H_0 = 2 км, это начальная высота спуска.

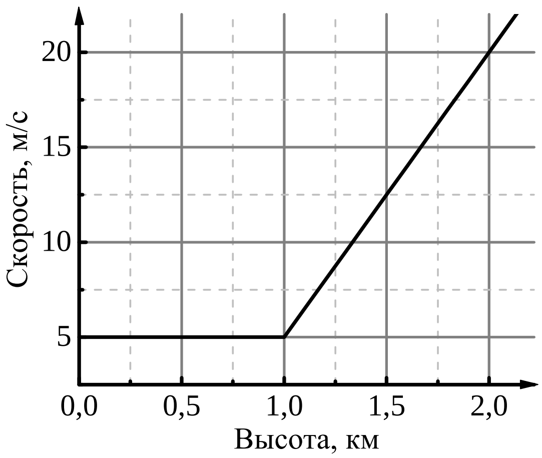


Рис. 1: Зависимость $V_{\text{ветра}}(H)$, данная в условии.

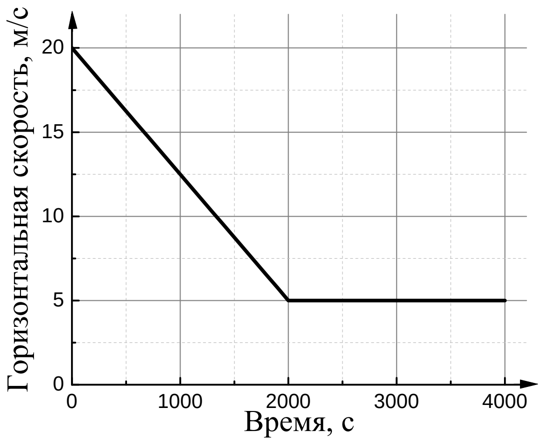


Рис. 2: Зависимость скорости шара от времени $V_X(t)$.

Графический метод

Так как нам известен график зависимости $V_X(t)$, то можно найти пройденный путь как площадь под графиком. Он складывается из двух частей:

- за первые 2000 с путь определяется площадью трапеции с основаниями 20 м/с и 5 м/с. Пройденный путь равен $S_1 = 25$ км;
- за следующие 2000 с путь определяется площадью прямоугольника со стороной 5 м/с. Пройденный путь равен $S_2 = 10$ км.

<u>**Ответ:**</u> смещение Гудвина от начальной точки равно $S_1 + S_2 = 35$ км.

Алгебраический метод

Можно воспользоваться фактом, что перемещение равно средней скорости умноженной на время движения. Так как на первом этапе скорость меняется со временем равномерно (равнозамедленное движение), то средняя скорость равна среднему арифметическому начальной и конечной $V_1 = (5 + 20)/2 = 12{,}5$ м/с. Пройденный путь равен $S_1 = 12{,}5$ м/с $\cdot$ 2000 с $= 25$ км.

На втором отрезке времени Гудвин двигался 2000 с с постоянной скоростью 5 м/с и сместился на $S_2 = 10$ км.

Задача 2. Машина с шариками

Машина всегда запускает шарики горизонтально, значит их движение по вертикали является падением с ускорением g и нулевой начальной скоростью. Тогда из закона движения по вертикали $h = \frac{g \cdot t^2}{2}$ мы можем найти время падения каждого шарика

$$t = \sqrt{2h/g}. \tag{1}$$

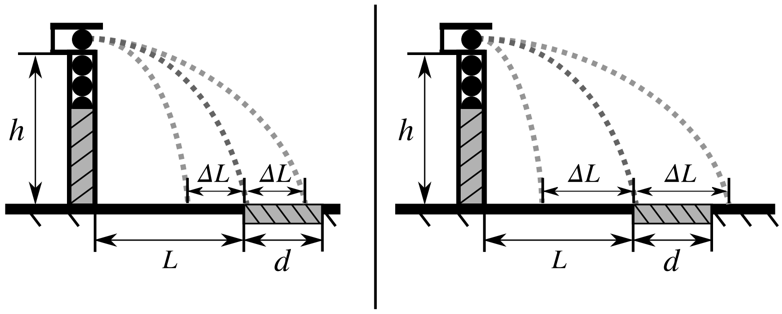


Рис. 3: Случай малого разброса скоростей (слева) и случай большого разброса скоростей (справа).

По горизонтали скорость шариков постоянна и изначально (до поломки машины) равна v. При этом машина попадает в край мишени, расположенной на неком расстоянии L от нее (Рис. 3 слева). Зная время падения шариков, это расстояние можно найти из закона движения по горизонтали

$$L = v \cdot t = v \cdot \sqrt{2h/g}. \tag{2}$$

Кода машина сломалась, время полета шариков не изменилось, но шарики стали в промежуток расстояний от $L - \Delta L = (v - \Delta v) \cdot t$ до $L + \Delta L = (v + \Delta v)t$ (см. Рис. 3), откуда

$$\Delta L = \Delta v \cdot \sqrt{2h/g} \tag{3}$$

Заметим, что так как шарики с разной начальной скоростью в промежутке от $v - \Delta v$ до $v + \Delta v$ встречаются одинаково часто, то и разные расстояния в промежутке от $L - \Delta L$ до $L + \Delta L$ будут встречаться одинаково часто.

Если разброс по длине не превышает ширины мишени, то есть $\Delta \leq d$ (Рис. 3 слева), шарики одинаково часто попадают в мишень и не долетают до нее, то есть попадает половина всех шариков. Если же $\Delta L > d$, то диапазон возможных расстояний включает в себя всю мишень, и часть шариков падает правее нее (Рис. 3 справа). Так как шарики одинаково часто попадают в разные точки промежутка шириной $2\Delta L$, то количество попавших в мишень пропорционально ее длине d. Тогда доля попавших шариков будет равна

$$\frac{d}{2\Delta L} = \frac{d}{2\Delta v \cdot \sqrt{2h/g}}. \tag{4}$$

<u>Ответ:</u> если $\Delta v \cdot \sqrt{2h/g} \leq d$ — попадает половина шариков, если $\Delta v \cdot \sqrt{2h/g} > d$ — попадет доля равная $\frac{d}{2\Delta v \cdot \sqrt{2h/g}}$ от всех шариков.

‘

Задача 3. Утепление избушки

Известно, что мощность теплопотерь через материал пропорциональна разности температур

$$P = \alpha \Delta T \tag{5}$$

Введем обозначения:

- P — изначальная мощность обогревателя;
- $T_0 = -28^\circ C$ — температура на улице;
- $T_1 = -4^\circ C$ — изначальная температура в избушке;
- $T_2 = 12^\circ C$ — температура в избушке с одним обычным окном и одним стеклопакетом;
- T_3 — температура в избушке с двумя стеклопакетами;
- α_1 — коэффициент пропорциональности в уравнении (5) для обычного стекла;
- α_2 — коэффициент пропорциональности в уравнении (5) для стеклопакета.

Заметим, что во всех трех случаях в избушке устанавливалось тепловое равновесие, а значит мощность обогревателя каждый раз равнялась сумме мощностей теплопотерь через каждое из окон. Запишем соответствующие уравнения

$$\begin{cases} P = 2\alpha_1(T_1 - T_0) \\ P = (\alpha_1 + \alpha_2)(T_2 - T_0) \\ P/2 = 2\alpha_2(T_3 - T_0) \end{cases} \tag{6}$$

Приравняем правые части первых двух уравнений из (6)

$$2\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ или } 48\alpha_1 = 40(\alpha_1 + \alpha_2) \tag{7}$$

$$\alpha_1 = 5\alpha_2 \tag{8}$$

Можно сказать, что стеклопакет проводит тепло в 5 разу хуже, чем обычное окно. Теперь поделим первое уравнение из (6) на третье

$$2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{T_1 - T_0}{T_3 - T_0} \tag{9}$$

$$T_3 = 12\frac{\alpha_1}{\alpha_2}{}^\circ C + T_0 \tag{10}$$

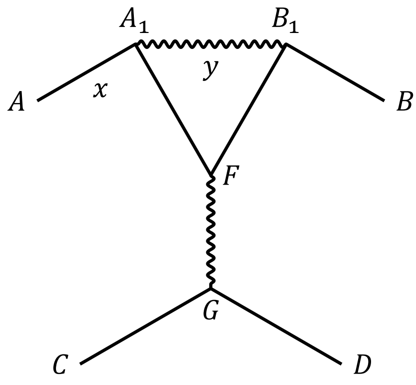
Откуда

$$T_3 = 12 \cdot 5^\circ C - 28^\circ C = 32^\circ C \tag{11}$$

Ответ: в избушке установится температура $32^\circ C$.

Задача 4. Сопротивление пингвина

Основные выражения



Обозначим сопротивления резисторов, изображенных прямой линией (таких, как AA_1), за x, а резисторов отмеченных волнистой линией (A_1B_1 и FG) — за y. Отметим, что при подключении контактов к точкам A и B ток через резистор FG не потечет, и часть схемы ниже точки F не будет влиять на сопротивление между точками A и B. Таким образом, при измерении сопротивления между A и B следует учитывать три последовательно соединенные части схемы: AA_1, A_1B_1, и B_1B, сопротивления которых равны x, $2xy/(2x+y)$ и x соответственно.

Мы можем записать:

$$R_{AB} = 2x + \frac{2xy}{2x+y} \,. \tag{12}$$

Аналогично, можно отметить, что при измерении сопротивления между точками A и C, ток не пойдет по резистору B_1B и по резистору GD. Сопротивление между A и C складывается из четырех последовательных частей: трех резисторов суммарным сопротивлением $2x+y$ и участка A_1F сопротивлением $x(x+y)/(2x+y)$. Отметим также, что сопротивление между точками C и D равно $2x$.

$$R_{AC} = 2x + y + \frac{x(x+y)}{2x+y} \tag{13}$$

$$R_{CD} = 2x \,. \tag{14}$$

Решение уравнений. Способ 1

Видно, что в приведенных выражениях часто встречается величина $2x+y$. Чтобы упростить формулы, обозначим ее как $\alpha = 2x+y$ и выразим сопротивления через α и y. В результате получаются выражения

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \alpha - y + \frac{y(\alpha-y)}{\alpha} = \frac{\alpha^2-y^2}{\alpha} \\ R_{AC} &= \alpha + \frac{1}{4}\frac{(\alpha+y)(\alpha-y)}{\alpha} = \alpha + \frac{\alpha^2-y^2}{4\alpha} \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Комбинируя эти выражения, легко заметить, что

$$R_{AC} = \alpha + \frac{1}{4}R_{AB} \quad \text{или} \quad \alpha = R_{AC} - \frac{1}{4}R_{AB} \,. \tag{16}$$

Далее можно воспользоваться первым уравнением из (**??**) и записать

$$y^2 = \alpha^2 - \alpha R_{AB} \quad \text{или} \quad y = \sqrt{R_{AC}^2 - \tfrac{3}{2}R_{AB}R_{AC} + \tfrac{5}{16}R_{AB}^2} \,. \tag{17}$$

Искомое сопротивление $R_{CD} = 2x = \alpha - y$

$$R_{CD} = R_{AC} - \tfrac{1}{4}R_{AB} - \sqrt{R_{AC}^2 - \tfrac{3}{2}R_{AB}R_{AC} + \tfrac{5}{16}R_{AB}^2} = 8\ \text{Ом}. \tag{18}$$

Решение уравнений. Способ 2

Глядя на уравнения (12)-(13) легко заметить, что если увеличить значения x и y в n раз, то и значения обоих измеренных сопротивлений увеличатся в n раз. Этот факт можно использовать в решении следующим образом: изначально мы имеем два уравнения с двумя неизвестными, однако упомянутая «пропорциональность» позволяет свести задачу к одному уравнению для одной неизвестной. Действительно, величина $\phi = R_{AB}/R_{AC}$ из соображений размерности может зависеть только от соотношения $\beta = y/2x$.

Для того, чтобы использовать этот факт в решении, поделим уравнение (12) на уравнение (13) и получим

$$\phi = \frac{1 + \frac{\beta}{1+\beta}}{1 + \beta + \frac{1}{2}\frac{1+2\beta}{2+2\beta}} \,. \tag{19}$$

Это позволяет получить уравнение для β в виде:

$$\beta^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\phi}\right)\beta + \frac{5}{4} - \frac{1}{\phi} = 0 \,. \tag{20}$$

Из этого уравнения можно найти β. В нашем случае $\phi = 12/19$ и $\beta = 1$. Далее можно воспользоваться, например, уравнением (12) и записать:

$$R_{AB} = 2x + 2x\frac{y}{2x + y} = R_{CD}\left(1 + \frac{\beta}{1 + \beta}\right) = \frac{3}{2}R_{CD} \,. \tag{21}$$

Из этого выражения прямо следует

Ответ: $R_{CD} = 8$ Ом.

Задача 5. Сила Архимеда

По условию пружины легкие и тонкие, значит силой Архимеда и силой тяжести, действующей на них можно пренебречь. Совокупность одинаковых пружин имеет некоторый суммарный коэффициентом жесткости k, и недеформированную длину L, такую же, как у каждой пружины в отдельности. Обозначим как L_1 высоту, на которой расположена первая черточка, L_2 — высоту второй черточки и L_3 — высоту третей черточки. Напишем второй закон Ньютона для каждого из случаев (см. Рис. 4):

$$\begin{cases} m_b g - k(L - L_1) = 0 \\ m_b g - F_{\text{арх}2} = 0 \\ m_b g + k(L_3 - L - h_b) - F_{\text{арх}3} = 0 \end{cases} \tag{22}$$

где h_b — высота бруска, m_b — масса бруска и $F_{\text{арх}2}$, $F_{\text{арх}3}$ — сила Архимеда, действующая в случаях 2 и 3 соответственно.

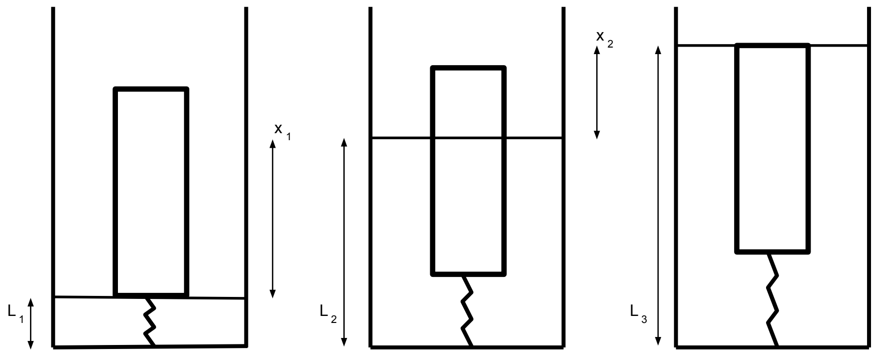


Рис. 4: к задаче 5

Исходя из данных выражений, найдем для каждой черточки на какой высоте она находится от дна стакана. Для первой черточки:

$$L_1 = L - \frac{\rho_b V_b g}{k} \tag{23}$$

где ρ_b — плотность бруска V_b — объем бруска и k — суммарная жесткость пружин.

Теперь запишем выражения для второй пружины:

$$L_2 = L + \frac{\rho_b}{\rho} h_b \tag{24}$$

где ρ — плотность воды. Это легко вывести из условия того, что брусок должен плавать в данном случае (так как на пружину не действуют никакие силы со стороны бруска):

$$\rho_b h_b S_b = \rho (L_2 - L) S_b \tag{25}$$

Теперь напишем выражение для третьей черточки:

$$L_3 = L + h_b + \frac{(\rho - \rho_b) V_b g}{k} \tag{26}$$

Теперь легко найти расстояния между черточками. Между первой и второй:

$$x_1 = L_2 - L_1 = \frac{\rho_b}{\rho} h_b + \frac{\rho_b V_b g}{k} = \rho_b \left(\frac{h_b}{\rho} + \frac{V_b g}{k} \right) \tag{27}$$

Между второй и третей:

$$x_2 = L_3 - L_2 = h_b + \frac{(\rho - \rho_b) V_b g}{k} - \frac{\rho_b}{\rho} h_b = \frac{(\rho - \rho_b) V_b g}{k} + \frac{\rho - \rho_b}{\rho} h_b = (\rho - \rho_b) \left(\frac{V_b g}{k} + \frac{h_b}{\rho} \right) \tag{28}$$

Зная, что $\frac{x_1}{x_2} = 4$, получим:

$$\frac{\rho_b}{\rho - \rho_b} = 4 \tag{29}$$

$$\rho_b = \frac{4}{5}\rho = 800 \text{ кг/м}^3 \tag{30}$$

<u>Ответ:</u> плотность материала бруска 800 кг/м^3.

Вариант 2

Задача 1. Северный ветер

Возможно несколько способов решения данной задачи. В любом случае требуется получить из графика данного в условии (Рис. 1) зависимость скорости шара V_X от времени t прошедшего с начала снижения (скорость шара направлена на юг). График такой зависимости приведен на Рис. 2. Чтобы получить эту зависимость, необходимо сделать два утверждения:

- так как скорость снижения постоянна, то снижение на фиксированную величину ΔH всегда соответствует одному и тому же отрезку времени Δt. Таким образом, график зависимости $V_X(t)$ будет состоять из двух частей - движения с постоянной скоростью и равномерного замедления;
- для определения масштаба следует отметить, что $\Delta H/\Delta t = U$, где $U = 2$ м/с это скорость снижения, данная в условии.

Более формально то же можно выразить на языке функций, если обозначить данную в условии скорость ветра, как функцию $V_{\text{ветра}}(H)$. Тогда, учитывая равномерность движения вдоль вертикальной оси, можно записать $V_X(t) = V_{\text{ветра}}(H_0 - Ut)$, где $H_0 = 3$ км, это начальная высота спуска.

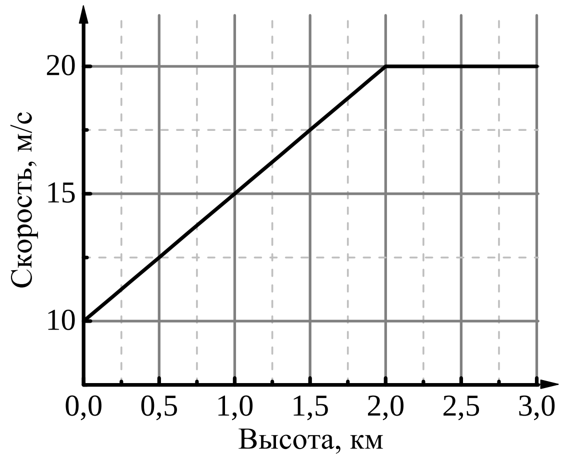


Рис. 1: Зависимость $V_{\text{ветра}}(H)$, данная в условии.

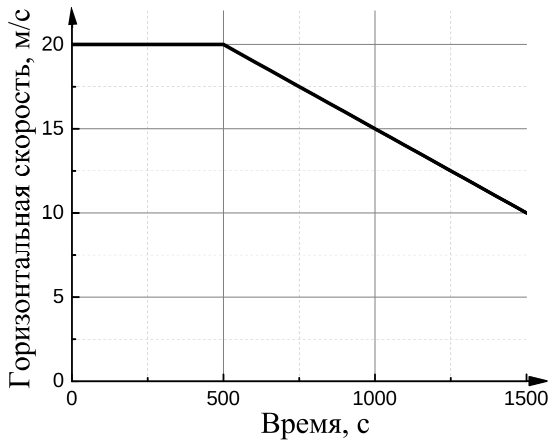


Рис. 2: Зависимость скорости шара от времени $V_X(t)$.

Графический метод

Так как нам известен график зависимости $V_X(t)$, то можно найти пройденный путь как площадь под графиком. Он складывается из двух частей:

- за первые 500 с путь определяется площадью прямоугольника со стороной 20 м/с. Пройденный путь равен $S_2 = 10$ км.
- за следующие 1000 с путь определяется площадью трапеции с основаниями 20 м/с и 10 м/с. Пройденный путь равен $S_2 = 15$ км.

Ответ: смещение Гудвина от начальной точки равно $S_1 + S_2 = 25$ км.

Алгебраический метод

Можно воспользоваться фактом, что перемещение равно средней скорости умноженной на время движения. На первом отрезке времени Гудвин двигался 500 с с постоянной скоростью 20 м/с и сместился на $S_2 = 10$ км.

Так как на втором этапе скорость меняется со временем равномерно (равнозамедленное движение), то средняя скорость равна среднему арифметическому начальной и конечной $V_1 = (10 + 20)/2 = 15$ м/с. Пройденный путь равен $S_1 = 15$ м/с $\cdot$ 1000с $= 15$ км.

Задача 2. Машина с шариками

Машина всегда запускает шарики горизонтально, значит их движение по вертикали является падением с ускорением g и нулевой начальной скоростью. Тогда из закона движения по вертикали $h = \frac{g \cdot t^2}{2}$ мы можем найти время падения каждого шарика

$$t = \sqrt{2h/g}. \tag{1}$$

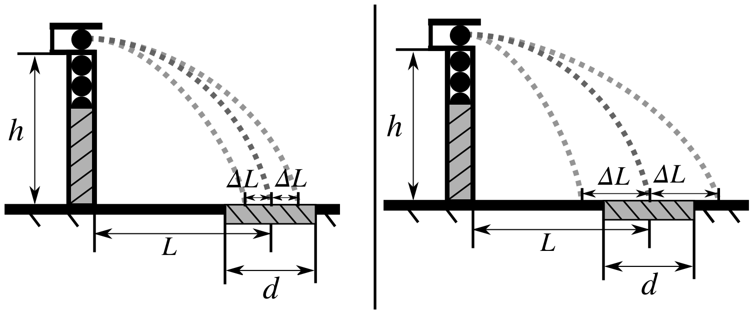


Рис. 3: Случай малого разброса скоростей (слева) и случай большого разброса скоростей (справа).

По горизонтали скорость шариков постоянна и изначально (до поломки машины) равна v. При этом машина попадает в центр мишени, расположенной на расстоянии L от нее (см. Рис. 3). Зная время падения шариков это расстояние можно найти из закона движения по горизонтали

$$L = v \cdot t = v \cdot \sqrt{2h/g}. \tag{2}$$

Кода машина сломалась, время полета шариков не изменилось, но шарики стали падать в промежуток расстояний от $L - \Delta L = (v - \Delta v) \cdot t$ до $L + \Delta L = (v + \Delta v)t$ (см. Рис. 3), откуда

$$\Delta L = \Delta v \cdot \sqrt{2h/g} \tag{3}$$

Заметим, что так как шарики с разной начальной скоростью в промежутке от $v - \Delta v$ до $v + \Delta v$ встречаются одинаково часто, то и разные расстояния в промежутке от $L - \Delta L$ до $L + \Delta L$ будут встречаться одинаково часто.

Если разброс по длине не превышает ширины мишени, то есть $\Delta L \leq d/2$ (см. Рис. 3 слева), то все шарики попадают в мишень. Если же $\Delta L > d/2$, то промежуток возможных расстояний включает в себя всю мишень, и часть шариков падает правее и левее нее (см. Рис. 3 справа). Так как шарики одинаково часто попадают в разные точки промежутка шириной $2\Delta L$, то количество попавших в мишень пропорционально ее длине d. Тогда доля попавших шариков будет равна

$$\frac{d}{2\Delta L} = \frac{d}{2\Delta v \cdot \sqrt{2h/g}}. \tag{4}$$

Ответ: Если $\Delta v \cdot \sqrt{2h/g} \leq d/2$ — попадают все шарики, если $\Delta v \cdot \sqrt{2h/g} > d$ — попадет часть равная $\frac{d}{2\Delta v \cdot \sqrt{2h/g}}$ от всех шариков.

Задача 3. Утепление избушки

Известно, что мощность теплопотерь через материал пропорциональна разности температур

$$P = \alpha \Delta T \tag{5}$$

Введем обозначения:

- P — изначальная мощность обогревателя;
- $T_0 = -20^{\circ}C$ — температура на улице;
- $T_1 = -4^{\circ}C$ — изначальная температура в избушке;
- $T_2 = 8^{\circ}C$ — температура в избушке с одним обычным окном и одним стеклопакетом;
- T_3 — температура в избушке с двумя стеклопакетами;
- α_1 — коэффициент пропорциональности в уравнении (5) для обычного стекла;
- α_2 — коэффициент пропорциональности в уравнении (5) для стеклопакета.

Заметим, что во всех трех случаях в избушке устанавливалось тепловое равновесие, а значит мощность обогревателя каждый раз равнялась сумме мощностей теплопотерь через каждое из окон. Запишем соответствующие уравнения

$$\begin{cases} P = 2\alpha_1(T_1 - T_0) \\ P = (\alpha_1 + \alpha_2)(T_2 - T_0) \\ P/2 = 2\alpha_2(T_3 - T_0) \end{cases} \tag{6}$$

Приравняем правые части первых двух уравнений из (6)

$$2\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ или } 32\alpha_1 = 28(\alpha_1 + \alpha_2) \tag{7}$$

$$\alpha_1 = 7\alpha_2 \tag{8}$$

Можно сказать, что теплопакет проводит тепло в 7 раз хуже, чем окно. Теперь поделим первое уравнение из (6) на третье

$$2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{T_1 - T_0}{T_3 - T_0} \tag{9}$$

$$T_3 = 8\frac{\alpha_1}{\alpha_2}{}^{\circ}C + T_0 \tag{10}$$

Откуда

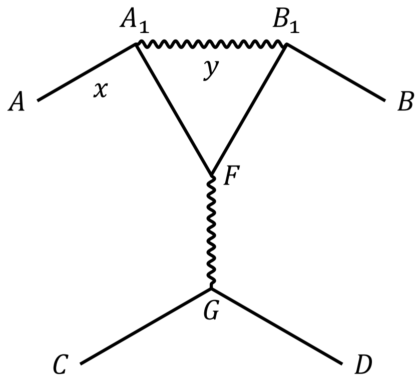
$$T_3 = 8 \cdot 7^{\circ}C - 20^{\circ}C = 36^{\circ}C \tag{11}$$

Ответ: в избушке установится температура $36^{\circ}C$.

Задача 4. Сопротивление пингвина

Основные выражения

Обозначим сопротивления резисторов, изображенных прямой линией (таких, как AA_1), за x, а резисторов отмеченных волнистой линией (A_1B_1 и FG) — за y. Отметим, что при подключении контактов к точкам B и A ток через резистор FG не потечет, и часть схемы ниже точки F не будет влиять на сопротивление между точками B и A. Таким образом, при измерении сопротивления между B и A следует учитывать три последовательно соединенные части схемы: BB_1, B_1A_1, A_1A, сопротивления которых равны x, $2xy/(2x+y)$ и x соответственно.



Мы можем записать:

$$R_{BA} = 2x + \frac{2xy}{2x+y}\,. \tag{12}$$

Аналогично, можно отметить, что при измерении сопротивления между точками D и A, ток не пойдет по резистору B_1B и по резистору GC. Сопротивление между D и A складывается из четырех последовательных частей: трех резисторов суммарным сопротивлением $2x+y$ и участка FA_1 сопротивлением $x(x+y)/(2x+y)$. Отметим также, что сопротивление между точками C и D равно $2x$.

$$R_{DA} = 2x + y + \frac{x(x+y)}{2x+y} \tag{13}$$

$$R_{CD} = 2x\,. \tag{14}$$

Решение уравнений. Способ 1

Видно, что в приведенных выражениях часто встречается величина $2x+y$. Чтобы упростить формулы, обозначим ее как $\alpha = 2x+y$ и выразим сопротивления через α и y. В результате получаются выражения

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \alpha - y + \frac{y(\alpha-y)}{\alpha} = \frac{\alpha^2-y^2}{\alpha} \\ R_{AC} &= \alpha + \frac{1}{4}\frac{(\alpha+y)(\alpha-y)}{\alpha} = \alpha + \frac{\alpha^2-y^2}{4\alpha}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Комбинируя эти выражения, легко заметить, что

$$R_{DA} = \alpha + \frac{1}{4}R_{BA} \quad \text{или} \quad \alpha = R_{DA} - \frac{1}{4}R_{BA}\,. \tag{16}$$

Далее можно воспользоваться первым уравнением из (15) и записать

$$y^2 = \alpha^2 - \alpha R_{BA} \quad \text{или} \quad y = \sqrt{R_{DA}^2 - \tfrac{3}{2}R_{BA}R_{DA} + \tfrac{5}{16}R_{BA}^2}\,. \tag{17}$$

Искомое сопротивление $R_{CD} = 2x = \alpha - y$

$$R_{CD} = R_{DA} - \tfrac{1}{4}R_{BA} - \sqrt{R_{CA}^2 - \tfrac{3}{2}R_{BA}R_{DA} + \tfrac{5}{16}R_{BA}^2} = 10\ \text{Ом}. \tag{18}$$

Решение уравнений. Способ 2

Глядя на уравнения (12)-(13) легко заметить, что если увеличить значения x и y в n раз, то и значения обоих измеренных сопротивлений увеличатся в n раз. Этот факт можно использовать в решении следующим образом: изначально мы имеем два уравнения с двумя неизвестными, однако упомянутая «пропорциональность» позволяет свести задачу к одному уравнению для одной неизвестной. Действительно, величина $\phi = R_{BA}/R_{DA}$ из соображений размерности может зависеть только от соотношения $\beta = y/2x$.

Для того, чтобы использовать этот факт в решении, поделим уравнение (12) на уравнение (13) и получим

$$\phi = \frac{1 + \frac{\beta}{1+\beta}}{1 + \beta + \frac{1}{2}\frac{1+2\beta}{2+2\beta}} \; . \tag{19}$$

Это позволяет получить уравнение для β в виде:

$$\beta^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\phi}\right)\beta + \frac{5}{4} - \frac{1}{\phi} = 0 \; . \tag{20}$$

Из этого уравнения можно найти β. В нашем случае $\phi = 16/29$ и $\beta = 1,5$. Далее можно воспользоваться, например, уравнением (12) и записать:

$$R_{BA} = 2x + 2x\frac{y}{2x+y} = R_{CD}\left(1 + \frac{\beta}{1+\beta}\right) = \frac{8}{5}R_{CD} \; . \tag{21}$$

Из этого выражения прямо следует

Ответ: $R_{CD} = 10$ Ом.

Задача 5. Сила Архимеда

По условию пружины легкие и тонкие, значит силой Архимеда и силой тяжести, действующей на них можно пренебречь. Совокупность одинаковых пружин имеет некоторый суммарный коэффициентом жесткости k, и недеформированную длину L, такую же, как у каждой пружины в отдельности. Обозначим как L_1 высоту, на которой расположена первая черточка, L_2 — высоту второй черточки и L_3 — высоту третей черточки. Напишем второй закон Ньютона для каждого из случаев (см. Рис. 4):

$$\begin{cases} m_b g - k(L - L_1) = 0 \\ m_b g - F_{\text{арх}2} = 0 \\ m_b g + k(L_3 - L - h_b) - F_{\text{арх}3} = 0 \end{cases} \tag{22}$$

где h_b — высота бруска, m_b — масса бруска и $F_{\text{арх}2}$, $F_{\text{арх}3}$ — сила Архимеда, действующая в случаях 2 и 3 соответственно.

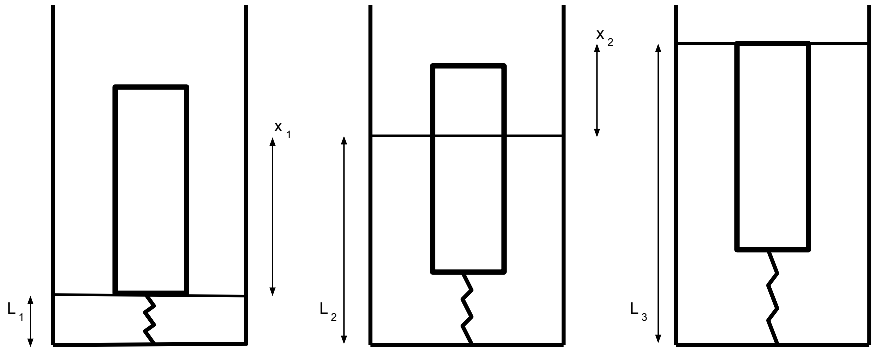


Рис. 4: к задаче 5

Исходя из данных выражений, найдем для каждой черточки на какой высоте она находится от дна стакана. Для первой черточки:

$$L_1 = L - \frac{\rho_b V_b g}{k} \tag{23}$$

где ρ_b — плотность бруска V_b — объем бруска и k — суммарная жесткость пружин.

Теперь запишем выражения для второй пружины:

$$L_2 = L + \frac{\rho_b}{\rho} h_b \tag{24}$$

где ρ — плотность воды. Это легко вывести из условия того, что брусок должен плавать в данном случае (так как на пружину не действуют никакие силы со стороны бруска):

$$\rho_b h_b S_b = \rho(L_2 - L) S_b \tag{25}$$

Теперь напишем выражение для третьей черточки:

$$L_3 = L + h_b + \frac{(\rho - \rho_b) V_b g}{k}$$

Теперь легко найти расстояния между черточками. Между первой и второй:

$$x_1 = L_2 - L_1 = \frac{\rho_b}{\rho} h_b + \frac{\rho_b V_b g}{k} = \rho_b \left(\frac{h_b}{\rho} + \frac{V_b g}{k} \right) \tag{26}$$

Между второй и третей:

$$x_2 = L_3 - L_2 = h_b + \frac{(\rho - \rho_b) V_b g}{k} - \frac{\rho_b}{\rho} h_b = \frac{(\rho - \rho_b) V_b g}{k} + \frac{\rho - \rho_b}{\rho} h_b = (\rho - \rho_b) \left(\frac{V_b g}{k} + \frac{h_b}{\rho} \right) \tag{27}$$

Зная, что $\frac{x_1}{x_2} = 3$, получим:

$$\frac{\rho_b}{\rho - \rho_b} = 3 \tag{28}$$

$$\rho_b = \frac{3}{4}\rho = 750 \text{ кг/м}^3 \tag{29}$$

<u>**Ответ:**</u> плотность материала бруска 750 кг/м^3.