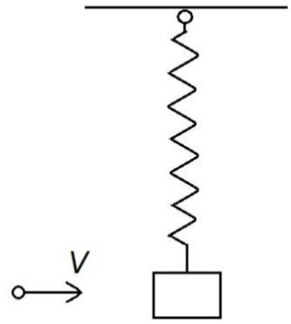
Физика, 11 класс, муниципальный этап

Возможные решения задач

Задача № 1. «Попадание пули» (10 баллов)

В груз массой 700 *г*, неподвижно висящий на пружине массой 30 *г* с коэффициентом жесткости 40 *Н*/*м*, попадает пуля массой 7 *г*, летящая горизонтально со скоростью 300 *м*/*с*, и застревает в нем. Пружина в точке подвеса может свободно поворачиваться. В момент максимального отклонения пружины от вертикали, равного 60^0, скорость груза обращается в нуль, причем пружина в этот момент оказывается не деформирована. Найдите длину недеформированной пружины.



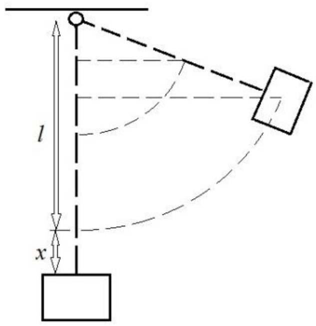
Возможное решение:

До попадания пули удлинение пружины равно:

$$x = \frac{Mg}{k}, \qquad (1)$$

где M – масса груза, k – коэффициент жесткости пружины.

Энергия системы вначале состоит из кинетической энергии пули, потенциальной энергии растянутой пружины и потенциальной энергии пружины в поле тяжести, если отсчитывать потенциальную энергию от положения груза (см. рисунок):



$$E_1 = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + m_1 g\frac{l+x}{2}, \qquad (2)$$

где m – масса пули, l – длина недеформированной пружины, m_1 – ее масса.

Из закона сохранения импульса находим скорость груза с застрявшей в нем пулей, u:

$$mV = (M+m)u, \qquad u = \frac{mV}{M+m}, \qquad (3)$$

так что энергия системы становится равна:

$$E_2 = \frac{m^2V^2}{2(M+m)} + \frac{kx^2}{2} + m_1 g\frac{l+x}{2} \qquad (4)$$

В момент максимального отклонения пружины от вертикали, когда $\alpha = 60^\circ$, эта энергия равна только потенциальной энергии в поле тяжести:

$$E_2 = (M+m)g(x + l - l\cos\alpha) + m_1 g\left(x + l - \frac{l}{2}\cos\alpha\right). \qquad (5)$$

Окончательно для длины недеформированной пружины получаем:

$$l = \frac{1}{1-\cos\alpha}\left(\frac{m^2V^2 + (M+m)kx^2}{2(M+m)\left(M+m+\frac{m_1}{2}\right)g} - x\right), \qquad (6)$$

а ее численное значение равно $l = 70$ *см*.

Критерии оценивания:
Записано удлинение пружины до попадания пули, формула (1) – 0,5 балла,
записаны все составляющие энергии системы вначале, формула (2) – 2 балла,
записан закон сохранения импульса, формула (3) – 1 балл,
записана энергия системы после застревания пули, формула (4) – 1,5 балла,
записаны все составляющие энергии системы в конце, формула (5) – 2,5 балла,
записана формула (6) для длины недеформированной пружины – 2 балла,
найдено численное значение длины недеформированной пружины – 0,5 балла.

Дополнение к возможному решению

При составлении задачи была допущена ошибка. Первоначально предполагалось указать в условии, что массу пружины следует считать пренебрежимо малой, затем была добавлена масса пружины, однако в решении не было учтено как дополнительное удлинение пружины за счёт собственного веса вначале, так и то, что при попадании пули не только груз, но и пружина получает импульс и кинетическую энергию.

Точное решение задачи требует знаний, выходящих за рамки школьного курса, поэтому **при проверке предлагается оценивать отдельные пункты решения, разрешая сомнения «в пользу ученика».**

Для справки, длина пружины l с учётом дополнительного удлинения за счёт собственного веса выражается через длину недеформированной пружины l_0 путём решения дифференциального уравнения равновесия, что даёт:

$$l = l_0 + \frac{m_1 g}{2\,k}, \qquad \text{(Д-1)}$$

следовательно, величина x в формуле (1) решения есть удлинение пружины, дополнительное к l, а не к l_0.

Импульс пружины в законе сохранения импульса участники смогут учесть, считая, что вся масса пружины сосредоточена в её геометрическом центре, это даёт приблизительно правильный ответ, так что формулы (3) примут вид (мы будем опускать такой «тонкий» момент, как то, что центр масс пружины здесь не совпадает с её геометрическим центром):

$$mV = \left(M + m + \frac{m_1}{2}\right)u, \qquad u = \frac{m\,V}{M+m+\frac{m_1}{2}}. \qquad \text{(Д-2)}$$

Кинетическую энергию пружины нужно вычислять, как энергию вращательного движения, то есть через момент инерции (за рамками школьного курса физики):

$$E_{\text{кин.пр}} = \frac{I\,\omega^2}{2}, \quad I = \frac{1}{3}\,m_1(l+x)^2, \quad \omega = \frac{u}{l+x}. \qquad \text{(Д-3)}$$

Правильная формула для длины недеформированной пружины:

$$l = \frac{1}{1-\cos\alpha}\left(\frac{\left(M+m+\frac{m_1}{3}\right)m^2V^2 + \left(M+m+\frac{m_1}{2}\right)^2 k\,x^2}{2\left(M+m+\frac{m_1}{2}\right)^3 g} - x\right) - \frac{m_1 g}{2\,k}, \qquad \text{(Д-4)}$$

а её численное значение равно: l = 66 см.

Задача № 2. «Циклический процесс» (10 баллов)

Один моль идеального газа участвует в циклическом процессе, состоящем из трех этапов. На первом этапе происходит изобарное расширение газа при давлении p_1, при этом его объем увеличивается от значения V_1 вдвое. На втором этапе происходит нагрев и сжатие газа, при котором объем уменьшается до первоначального значения, а температура увеличивается еще на 50%, при этом зависимость $V(T)$ – линейная. На третьем этапе газ возвращается, при постоянном объеме, в исходное состояние. Чему равно максимальное давление газа в ходе процесса? Какие значения имеют давление и температура на втором этапе цикла в момент, когда объем равен $1{,}5V_1$? Найдите зависимости $V(T)$, $p(T)$, $p(V)$ для второго этапа. Изобразите цикл в осях переменных (V, T),(p, T) и (p, V).

Возможное решение:

Согласно уравнению состояния для одного моля идеального газа:

$$pV = RT\,, \qquad (1)$$

температура на первом этапе увеличивается также вдвое, до значения

$$T_2 = 2T_1 = 2\frac{p_1V_1}{R}\,. \qquad (2)$$

На втором этапе температура увеличивается еще на 50%, то есть до значения $T_3 = 3T_1$.

В осях переменных (V, T), поскольку на втором этапе зависимость $V(T)$ – линейная, цикл изображается треугольником, см. рис. 1.

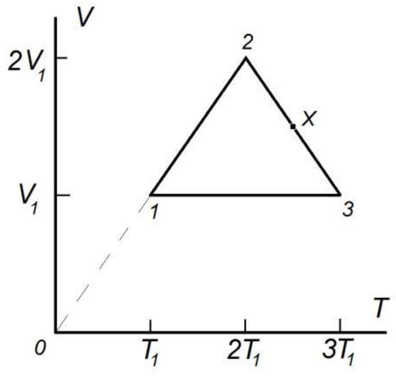


Рис. 1

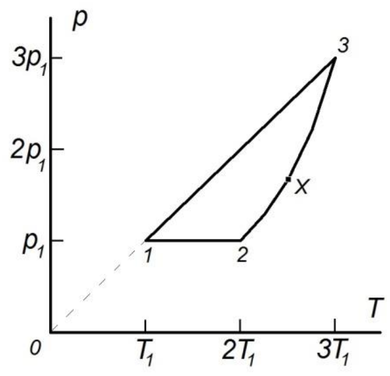


Рис. 2

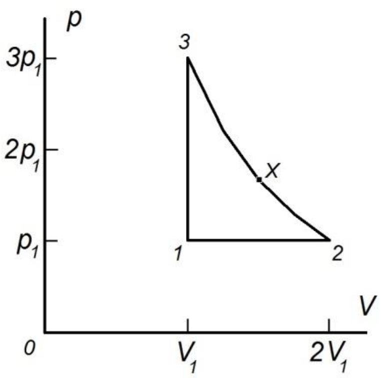


Рис. 3

Здесь точка на втором этапе цикла в момент, когда объем равен $1{,}5V_1$, обозначена X. Максимальное давление газа в ходе процесса достигается в точке 3 и равно:

$$p_3 = \frac{RT_3}{V_1} = 3p_1 \qquad (3)$$

В соответствии с линейной зависимостью $V(T)$ на втором этапе, температура в точке X равна $T_X = 2{,}5T_1$, а давление $p_X = \dfrac{RT_X}{V_X} = \dfrac{5}{3}p_1$. (4)

Записывая линейную зависимость $V(T)$ на втором этапе в виде формулы:

$$V(T) = aT + b\,, \qquad (5)$$

находим по двум точкам, 2 и 3, ее явный вид:

$$V(T) = V_1\left(4 - \frac{T}{T_1}\right). \qquad (6)$$

Используя формулу (6) и уравнение состояния (1), находим зависимости *p(T)* и *p(V)* для второго этапа:

$$p(T) = p_1 \frac{T}{4T_1 - T}, \qquad p(V) = p_1\left(4\frac{V_1}{V} - 1\right). \qquad (7)$$

Цикл в осях переменных *(p, T)* и *(p, V)* изображен на рис. 2 и 3.

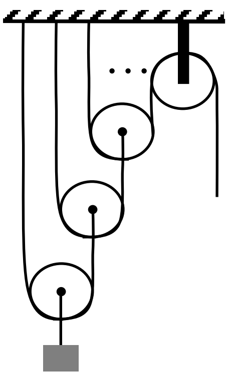
Критерии оценивания:

записана формула (1) – 0,5 балла,
изображен цикл в осях переменных (V, T), рис. 1 – 1 балл,
найдено максимальное давление газа, формула (3) – 0,5 балла,
найдены температура и давление в точке X – 1 балл,
найдена зависимость V(T)на втором этапе, формула (6) – 1,5 балла,
найдены зависимости p(T) и p(V) на втором этапе, формулы (7) – 1,5 балла,
изображен цикл в осях переменных (p, T), рис. 2 – 2 балла,
изображен цикл в осях переменных (p, V), рис. 3 – 2 балла.

Примечание:

максимальные баллы за рис. 2 и 3 ставятся, если изображены, хоть и приближенно, но с учетом положения точки X, нелинейные зависимости p(T) и p(V) на втором этапе.

Задача № 3. «Строительство» (10 баллов)



Не имеющие подъемного крана строители, способные тянуть веревку с усилием до 490 *Н* каждый, собираются поднять груз массой 200 *кг* на высоту 3 *м*, используя комбинацию из подвижных и одного неподвижного блоков. Пренебрегая трением в блоках и массой блоков по сравнению с массой груза и считая веревку невесомой, нерастяжимой и способной выдерживать любое напряжение, оцените:

1) какое минимальное количество строителей смогут поднять груз с использованием всего одного подвижного блока с постоянной скоростью?
2) какое минимальное количество подвижных блоков потребуется для того, чтобы груз поднял один строитель, если их соединить по схеме, приведенной на рисунке?
3) какова минимальная длина веревки, необходимая для подъема такого груза на такую высоту? (дайте грубую оценку, учитывая только длину выбираемой руками строителей веревки).

Возможное решение:

Неподвижный блок изменяет направление силы, но не дает вклада в работу.

$N_{стр}$ строителей тянут за крайнюю правую веревку вниз дружно, силы, которые они прикладывают (одинаковые), складываются, образуя силу $\vec{F} = N_{стр}\vec{F}_1$.

Эта же сила, но перенаправленная неподвижным блоком, будет поднимать вверх ближайший подвижный блок, он потянет за собой другие, и в итоге груз будет подниматься. Работа, которую совершают строители, выбирая веревку на длину *l*, затрачивается на подъем груза массой *m* на заданную высоту *h*:

$$A = Ph = Fl, \qquad (1)$$

где $P = mg$.

Опишем работу подвижных блоков, записав для каждого из них второй закон Ньютона с учетом того, что движение равномерное, т.е. ускорение равно нулю (и можно приравнять модули противоборствующих сил).

Пронумеровав их снизу вверх индексами от 1 до *n*, заметим, что для нижнего:
$P = 2T_1$, где T_1 – силы натяжения веревки слева и справа вверху над блоком 1;
для следующего: $T_1 = 2T_2$, где T_2 – силы натяжения веревки над блоком 2 и так далее;
для последнего подвижного блока $T_{n-1} = 2T_n$, и наконец, для неподвижного блока $F = T_n$.

Подставляя теперь первую формулу во вторую, вторую – в третью и так далее, получим:

$$F = \frac{P}{2^n}, \qquad (2)$$

т.е. необходимая для приложения сила зависит от числа используемых блоков.

Для одного подвижного блока ($n = 1$) $F = P/2$, тогда для обеспечения такой силы достаточно $N_{стр} = \frac{mg}{2F_1} = \frac{200 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 490} = 2$, т.е. двое строителей, работая на пределе своих возможностей, справятся с задачей.

Тот же результат можно получить, не выводя формулы (2), а решая задачу для одного подвижного блока отдельно (допустимо даже пользоваться известными свойствами подвижных блоков в готовом виде).

Изображенная на рисунке схема называется степенным полиспастом.

Пользуемся формулой (2), в которой $F = F_1$: $2^n = P / F_1 = 200 \cdot 9{,}8 / 490 = 4$, т.е. достаточно двух блоков, если тянуть на пределе возможностей.

Для оценки длины веревки объединим (1) и (2):

$$l = h\frac{P}{F} = h \cdot 2^n. \qquad (3)$$

То есть, $l = 3 \cdot 2^2 = 12$ *м*.

<u>Ответ:</u>
1) два;
2) два;
3) 12 метров.

Критерии оценивания:
получен ответ на первый вопрос (число рабочих) – 2 балла,
получено общее выражение для связи силы F, веса груза и числа блоков (2) – 3 балла,
получен ответ на второй вопрос (число блоков) – 1 балл,
получено выражение для длины веревки (3) – 2 балла,
получен ответ на третий вопрос – 1 балл,
описано различное действие подвижных и неподвижных блоков – 1 балл.

Задача № 4. «Эксперименты с водой» (10 баллов)

Юный экспериментатор неспешно измерял зависимость массы части воды, находящейся в жидком состоянии в закрытом цилиндре, от объема цилиндра при постоянной температуре. Результаты измерений приведены в таблице 1. При этом объемом воды в жидком состоянии можно пренебречь по сравнению с объемом цилиндра.

Определите:

1) общую массу воды в цилиндре (в жидком и газообразном состоянии);
2) плотность насыщенного водяного пара при температуре эксперимента;
3) температуру, при которой проходил эксперимент;
4) при каком объеме вся вода испарится, если температуру изменить на 25°*C*;
5) давление водяного пара в цилиндре при температуре 25°*C*.

Плотность насыщенного водяного пара для разных температур приведена в таблице 2.

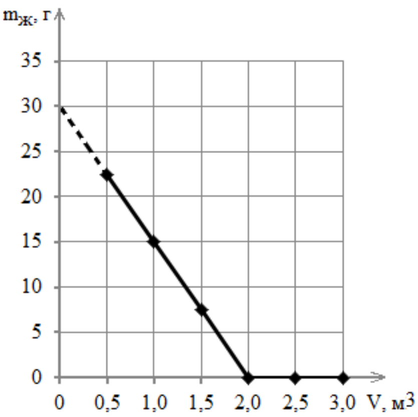
Таблица 1

№ опыта	Объем, *м*^{3}	Масса воды, *г*
1	0,5	23,5
2	1,0	15,0
3	1,5	7,5
4	2,0	0
5	2,5	0
6	3,0	0

Таблица 2

Температура, °*C*	Плотность насыщ. пара, *г/м*^{3}	Температура, °*C*	Плотность насыщ. пара, *г/м*^{3}
11	10,0	17	14,5
12	10,7	18	15,4
13	11,4	19	16,3
14	12,1	20	17,3
15	12,8	25	23,0
16	13,6	50	83,0

Возможное решение:



Можно для наглядности построить график зависимости массы воды от объема цилиндра. Масса воды уменьшается по линейному закону до нуля, имеющего место при объеме 2 *м*^{3}. Так как цилиндр закрыт, то суммарная масса воды в жидком $m_ж$ и газообразном состоянии $m_п$ остается неизменной, т.е. когда в жидкой фазе воды нет, то она вся находится в газообразной – в виде пара.

Обозначим полную массу воды в цилиндре m_0.

$m_{ж} + m_{п} = m_0$.

Так как эксперимент шел неспешно, то вода и пар в цилиндре находятся в равновесии, т.е. пар является насыщенным.

А так как температура не изменялась в течение всего времени, то и плотность пара $\rho_п = \rho_{нас.п.}$ оставалась постоянной.

Основываясь на этом, можно построить модель зависимости массы жидкой воды от объема:

$$m_{ж} = m_0 - m_{п} = m_0 - \rho_{нас.п.}V \qquad (1)$$

Отсюда при объеме, который можно считать практически нулевым, получим m_0 (продолжим график до пересечения с осью ординат): 30 *г*.

Из (1) же ясно, что плотность насыщенных паров определяет наклон графика:

$\rho_{нас.п.} = (m_0 - m_{ж})/V = (30-20)/1 = 10$ *г/м*^{3}.

По таблице 2 можно определить температуру пара 17,5°*C*.

При новой температуре 25°*C* плотность насыщенного пара равна (по таблице 2) $\rho_{нас.п.2} = 23$ *г/м*^{3}.

Тогда, стартуя с той же точки (0,30) график пойдет под другим наклоном и пересечет ось абсцисс в новой точке $V_2 = m_0 / \rho_{нас.п.2} = 30/23 = 1{,}3$ *м*^{3} – при таком объеме вся вода испарится при 25°*C*.

Давление водяного пара при 25°*C* определим из уравнения

$$\rho_{нас.п.2} = \frac{\rho_{нас.п.2}}{\mu_{в.п.}} RT_2,$$

где молярная масса водяного пара 18 *г/моль*,
температура $T_2 = 25 + 273 = 298\,K$.

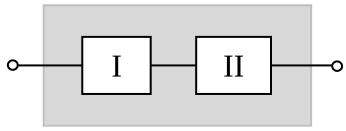
$$\rho_{нас.п.2} = \frac{23}{18} \cdot 8{,}31 \cdot 298 \approx 3164\ Па.$$

<u>Ответ:</u>
1) 30 *г*;
2) 10 *м*^{3};
3) 17,5°*C*;
4) 1,3 *м*^{3};
5) 3164 *Па*.

Критерии оценивания:
получена модель (1) – 2 балла,
получен ответ на первый вопрос (масса воды) – 2 балла,
найдена плотность пара (ответ на второй вопрос) – 2 балла,
найдена температура (ответ на третий вопрос) – 1 балл,
получен ответ на четвертый вопрос (объем, при котором испарится вся вода при 25°C) – 1 балл,
получен ответ на пятый вопрос (давление пара при 25°C) – 1 балл,
объяснено, почему пар в эксперименте – насыщенный – 1 балл.

Указания:
считать правильными и округленные ответы (в том числе 17 или 18 градусов как ответ на вопрос 3; 3,2 *кПа* или 3,16 *кПа* как ответ на вопрос 5, в общем случае в пределах 5%).

Задача № 5. «Черный ящик» (10 баллов)



В одном из раундов физического боя команде «Теоретики» предложили разгадать устройство непрозрачной коробочки с двумя выводами – электрического черного ящика, т.е. установить типы, номиналы элементов и схему их соединения. Ящик собрала команда «Практики» из выданного на две команды конструктор-набора, включающего 4 одинаковых полностью заряженных аккумулятора с э.д.с. 1,2 *В* и 4 одинаковых резистора с сопротивлением 10 *Ом*. У них была возможность использовать все из отобранных ими элементов, либо только часть, а часть спрятать. «Теоретикам» дали черный ящик, миллиамперметр, вольтметр и остатки конструктора. Проведя три эксперимента, они успешно справились с задачей. При этом вольтметр они присоединяли к единственному доставшемуся резистору, а черный ящик подключали последовательно с батареей, в которую смогли собирать один или несколько из доставшихся трех аккумуляторов. Решите и Вы эту задачу, пренебрегая сопротивлением соединительных проводов и аккумуляторов и считая приборы идеальными. Изобразите схему цепи в ящике и схему, по которой проводились эксперименты. Внутри ящика две группы элементов соединены последовательно.

№ эксперимента	Число аккумуляторов в батарее	Показания миллиамперметра, *мА*	Показания вольтметра, *В*
1	1	0	0
2	2	80	0,8
3	3	160	1,6

Возможное решение:

Из условия задачи понятно, что в черном ящике могут быть только такие элементы, которые были в исходном конструкторе – аккумуляторы и резисторы, причем одинаковые. По условию всего 1 резистор и 3 аккумулятора достались «Теоретикам», значит, в ящике могут быть 0, 1, 2 или 3 резистора, а если есть аккумулятор, то только один. Следовательно, команде «Теоретики» нужно было проверить, нет ли внутри черного ящика аккумуляторов (источник), есть ли резисторы, а затем установить число и схему соединения элементов, размещенных в двух группах.

Так как в ящике могут быть источники и резисторы, то удобнее всего содержимое черного ящика представить как некоторый эквивалентный источник с эквивалентной э.д.с. $E_я$, представленный аккумуляторами (группа I), и последовательно соединенное с ним эквивалентное сопротивление $R_я$, представленное совокупностью резисторов (группа II).

Тогда общая схема экспериментальной цепи представляет собой последовательное соединение батареи, резистора, амперметра и черного ящика (см. рисунок), и общий ток в цепи с учетом того, что аккумуляторы и приборы можно считать идеальными, определяется как

$$I = \frac{E + E_я}{R + R_я}, \qquad (1)$$

где $E = n_{ак} E_1$, $E_1 = 1{,}2$ $В$ по условию, а число аккумуляторов $n_{ак}$ равно 1, 2, 3.

Отсюда видно, что ток может быть нулевым, если э.д.с. батареи и источника в черном ящике равны по модулю и включены встречно (имеют разную полярность, как на рисунке). Следовательно, т.к. в первом эксперименте, где это наблюдается, в батарее 1 аккумулятор, то и в черном ящике один аккумулятор, включенный встречно. Можно и просто решить систему двух уравнений, составленных по закону Ома, для 2-го и третьего экспериментов относительно двух неизвестных – $E_я$ и $R_я$.

Показания приборов связывает закон Ома для участка цепи, к которому подключен вольтметр: $IR = U$, тогда из (1) получим

$$IR_я + U = E + E_я. \qquad (2)$$

Для второго эксперимента $E = 2E_1$, $I = I_2$, $U = U_2$, для третьего $E = 3E_1$, $I = I_3$, $U = U_3$:

$$I_2R_я + U_2 = 2E_1 + E, \qquad (3)$$

$$I_3R_я + U_3 = 3E_1 + E. \qquad (4)$$

Решаем систему (3)-(4), получим $R_я = \dfrac{E_1 + U_2 - U_3}{I_3 - I_2} = \dfrac{1,2 + 0,8 - 1,6}{0,16 - 0,08} = 5\ Ом$.

Так как э.д.с. источника в ящике уже найдена, дальше систему можно не решать (решение дает те же –1,2 *В* для э.д.с. источника в ящике).

Аналогичное заключение относительно аккумуляторов и общего сопротивления резисторов можно сделать, анализируя данные экспериментов с других позиций. Заметив, что с уменьшением э.д.с. батареи напряжение на ограничительном резисторе уменьшается на одну и ту же величину, продолжим эту зависимость на случай, когда батареи в схеме экспериментов не будет. При этом напряжение на резисторе будет отрицательным, что говорит о том, что ток через резистор потечет в противоположном направлении. Но если бы в ящике не было источника, то и тока не было бы, значит, источник в ящике есть, и он включен противоположно включению батареи. Таким образом, в ящике есть аккумулятор на $E_я = 1,2\ В$. Если бы в ящике не было бы резисторов, то этот аккумулятор в нашем мысленном эксперименте без батареи создавал бы ток по закону Ома для замкнутой цепи $I_0 = E_я / R = 1,2/10 = 120\ мА$, а вольтметр показывал бы $U_V = I_0R = 1,2\ В$, но продолжение графика дает всего $U'_V = 0,8\ В$. Следовательно, резисторы в ящике (1, 2 или 3) тоже есть.

Далее запишем выражение для общей силы тока в цепи, имея в виду, что источником является только черный ящик, а сопротивление оказывают и резисторы в ящике с общим сопротивлением $R_я$, и внешний резистор R: $I'_0 = \dfrac{E_я}{R + R_я}$.

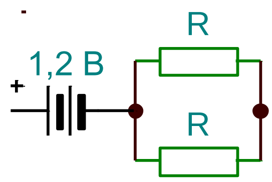
Тогда вольтметр показывает напряжение на внешнем резисторе: $U'_V = I'_0R = \dfrac{E_я}{R + R_я}R = \dfrac{E_я}{1 + R_я / R}$.

Отсюда $R_я = R\left(\dfrac{E_я}{U'_V} - 1\right) = 10\left(\dfrac{1,2}{0,8} - 1\right) = 5\ Ом$.

Анализируем число и соединение резисторов.

Так как $R_я = 5\ Ом$, то одного резистора в ящике быть не может, два резистора могут быть соединены параллельно (т.к. при этом сопротивление в два раза меньше, чем у каждого из них, что дает 5 *Ом*), а три резистора не позволяют получить 5 *Ом* (будучи соединенными последовательно, дадут 30 *Ом*, параллельно – 3,33 *Ом*, а один последовательно с двумя параллельными – 15 *Ом*).

Итого, решением задачи является один аккумулятор 1,2 *В*, включенный встречно по отношению к батарее в измерительной цепи (группа I), и последовательно соединенный с параллельным соединением двух резисторов по 10 *Ом* (группа II) (см. рисунок).



Критерии оценивания:
приведена схема для проведения экспериментов с правильным подключением приборов – 1 балл,
установлено и аргументировано наличие в ящике встречно (по отношению к батарее) включенного аккумулятора – 3 балла,
найдено эквивалентное сопротивление черного ящика – 3 балла,
определено количество и соединение резисторов в ящике – 2 балла,
приведена правильная схема соединения элементов в ящике – 1 балл.

Всего за все задания олимпиады – 50 баллов.