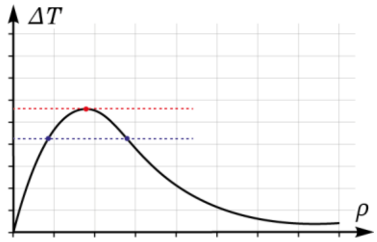
10 класс

Задача 1. Правильный нагрев. (Кармазин С.). Последовательная электрическая цепь состоит из идеального источника с напряжением U, резистора с сопротивлением R_0 и провода круглого сечения радиуса r и длиной L. До какой максимальной температуры $T_м$ может нагреться провод при правильном выборе материала, из которого он изготовлен? Температура в помещении T_0. Мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур $\Delta T = T - T_0$, где T – температура провода, и площади его боковой поверхности. Коэффициент пропорциональности α известен. Температурным изменением сопротивления и теплоотдачей с торцов провода можно пренебречь.

Решение. Тепловое равновесие наступит при равенстве количества тепла, выделяемого в единицу времени в проводе при прохождении по нему электрического тока, и отдаваемого проводом в окружающее пространство.

Тепловая мощность связанная с током: $N = I^2 R_{пр} = \left(\frac{U}{R_0 + R_{пр}}\right)^2 R_{пр} = \frac{U^2 \rho l}{\pi r^2 \left(R_0 + \frac{\rho l}{\pi r^2}\right)^2}$

Тепловая мощность, выдаваемая проводом в окружающее пространство: $N = 2\pi r l \alpha \Delta T$



Приравниваем мощности и выражаем ΔT:

$$\Delta T = \frac{U^2 \rho r}{2\alpha(\pi r^2 R_0 + \rho l)^2}$$

Отметим, что $\Delta T = 0$ при $\rho = 0$ и при ρ стремящейся к бесконечности. Это означает наличие максимума у данной зависимости.

Необходимо найти, при каком параметре ΔT уравнение на ρ: $2\alpha(\pi r^2 R_0 + \rho l)^2 \Delta T = U^2 \rho l$ имеет только одно решение. Для этого дискриминант полученного квадратного (относительно ρ) уравнения должен быть равен 0.

$\rho^2(2\alpha l^2 \Delta T) + \rho(4\alpha l \Delta T \pi r^2 R_0 - U^2 l) + (2\alpha \Delta T \pi^2 r^4 R_0^2) = 0$

$D = (4\alpha l \Delta T_{MAX} \pi r^2 R_0 - U^2 l) - 4(2\alpha \Delta T_{MAX} \pi^2\, r^4\, R_0^2\,)(2\alpha l^2 \Delta T_{MAX}) = 0$

В результате $\Delta T_{MAX} = \frac{U^2}{8\pi \alpha l r R_0}$.

Задание можно уносить с собой!!!

Сегодня, 16 декабря 2018 года, на портале abitu.net составители олимпиады проведут онлайн-разборы задач. Время начала разборов: 7 класс 15:30, 8 класс 16:30, 9 класс 17:30, 10 класс 19:00, 11 класс 20:30.

Для участия в разборе необходимо заранее зарегистрироваться на портале abitu.net.

Критерии оценивания:

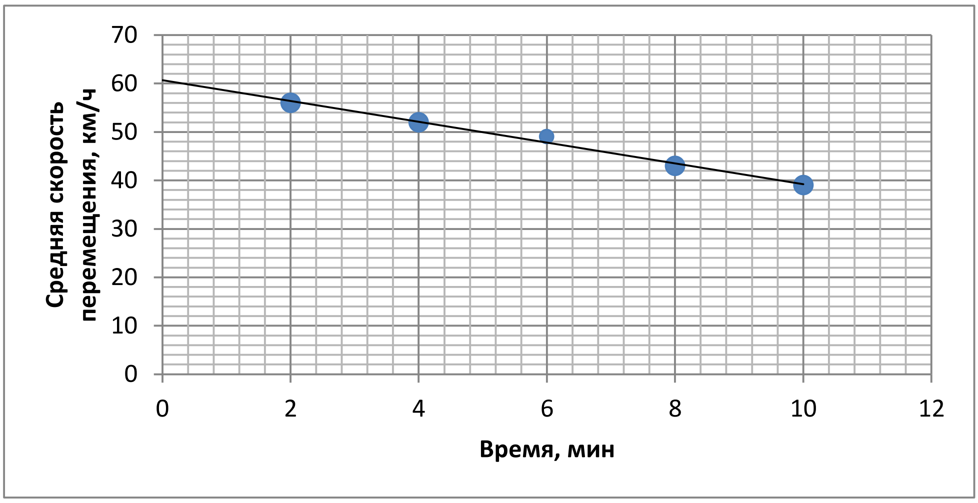
1. Сформулировано условие теплового равновесия в стационарном режиме, заключающееся в равенстве потребляемой электрической мощности и мощности теплоотдачи 1 балл
2. Правильно записано выражение для электрической мощности в проводе через напряжение источника и сопротивления 1 балл
3. Правильно записано сопротивление провода через удельное сопротивление и геометрические параметры 1 балл
4. Правильно записано выражение для мощности теплоотдачи 1 балл
5. Получена зависимость температуры провода от удельного сопротивления материала 2 балла
6. Предложен метод поиска максимума полученной зависимости 1 балл
7. Получен правильный результат 3 балла

Задача 2. Глюк на автомобиле. (Колдунов Л.). Экспериментатор Глюк ехал на автомобиле. В момент проезда мимо дома своего друга теоретика Бага Глюк решил измерить зависимость своей **средней** скорости от времени. Получившиеся результаты он свел в таблицу. Скорость изменялась монотонно.

t, мин	2	4	6	8	10
V, км/ч	56	52	49	43	39

Известно, что Глюк достаточно точно измеряет время, а скорость он определяет с погрешностью ±1 км/ч. Найдите максимальное удаление экспериментатора от дома Бага. В какой момент времени это произойдет? Чему будет равна в этот момент средняя скорость перемещения? Найдите путь, пройденный экспериментатором к 20 минуте движения.

Возможное решение. Построим график зависимости средней скорости перемещения от времени.



Видно, что зависимость линейная и ее можно записать, как

$$\langle V\rangle = V_0 - \frac{V_0}{t_0}t,$$

где $V_0 = 60$ км/ч, а $t_0 = 30$ мин.

По определению, средняя скорость перемещения $\langle V\rangle = \frac{x}{t}$, следовательно

$$x = V_0 t - \frac{V_0}{t_0}t^2.$$

Зависимость $x(t)$ - парабола ветви которой направлены вниз. Вершина параболы соответствует моменту времени, когда Глюк максимально удалился от дома Бага:

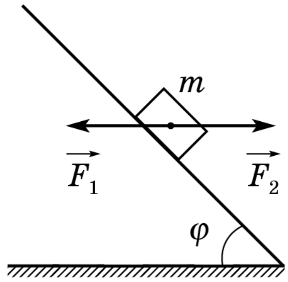
$$t_{max} = \frac{t_0}{2} = 15 \text{ мин} = \frac{1}{4} \text{часа}.$$

Величина средней скорости в этот момент будет равна 30 км/ч, а удаление от дома теоретика Бага 7,5 км. Путь, который проедет Глюк к 20 минуте движения 8,3 км.

Критерии оценивания

Построен график зависимости средней скорости перемещения от времени или проверено, что зависимость линейная любым другим рабочим способом	1 балл
Получена формула $\langle V \rangle = V_0 - \frac{V_0}{t_0} t$.	1 балл
Установлено, что $V_0 = 60$ км/ч, а $t_0 = 30$ мин.	1 балл
Показано, что $x = V_0 t - \frac{V_0}{t_0} t^2$.	2 балла
Найдено время, при котором расстояние от дома Бага до Глюка максимально	2 балла
Найдено значение средней скорости в этот момент времени	1 балл
Найден путь, который прошел Глюк к 20 минуте движения	2 балла

Задача 3. Горизонтальные силы. (Колдунов Л.). На наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол φ = 45°, расположено тело массы m = 1 кг (рис.). Коэффициент трения между плоскостью и телом k = 0,5. В первом случае на тело действуют горизонтальной силой F_1 = 5 Н, направленной влево, во втором случае действуют горизонтальной силой F_2 = 5 Н, направленной вправо. Чему равно отношение α силы трения в первом и во втором случаях?



Возможное решение. 1) Рассмотрим случай, когда сила F направлена влево. Сумма проекций сил F и mg на наклонную плоскость равна $\frac{1}{\sqrt{2}}(mg - F)$, Нормальная реакция опоры $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(mg + F)$, а максимально возможное значение силы трения для этого случая равно $F_{\text{тр}} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}(mg + F)$. Заметим, что это больше, чем сумма всех остальных сил вдоль наклонной плоскости. Следовательно, в первом случае сила трения равна силе трения покоя, т.е. она равна $F_{\text{тр.1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(mg - F)$,

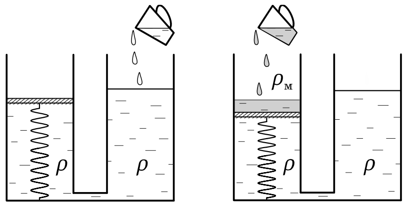
2) Теперь рассмотрим случай, когда сила F направлена вправо. Сумма проекций сил F и mg на наклонную плоскость равна $\frac{1}{\sqrt{2}}(mg + F)$. Нормальная реакция опоры $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(mg - F)$. а максимально возможное значение силы трения $F_{\text{тр.2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}(mg - F)$. Получаем, что в этом случае сила трения это сила трения скольжения, т.е. она равна $F_{\text{тр.2}}$.

Разделив одну силу трения на другую получаем, что верный ответ: $\mu^{-1} = 2$.

Критерии оценивания.

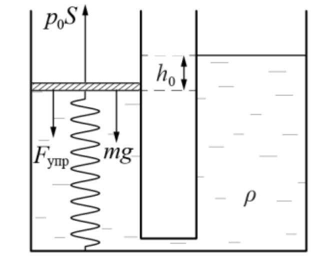
1) Найдена нормальная реакция опоры в случае (1)	1 балл
2) Найдена максимально возможная сила трения в случае (1)	1 балл
3) определена сила трения в случае (1)	2 балла
4) Найдена нормальная реакция опоры в случае (2)	1 балл
5) Найдена максимально возможная сила трения в случае (2)	1 балл
6) определена сила трения в случае (2)	2 балла
7) Получен ответ	2 балла

Задача 4. Сообщающиеся сосуды (3). (Кутелев К.). В двух высоких сообщающихся сосудах одинакового сечения находится небольшое количество жидкости неизвестной плотности ρ. В левом сосуде жидкость закрыта удерживаемым пружиной поршнем. Если начать наливать жидкость в правый сосуд, то ее уровень в нем будет расти на 10% быстрее, чем в левом (рис. а). Если же в левый сосуд на поршень наливать мед с плотностью $\rho_м = 1{,}6$ г/см^3, то некоторое время верхняя граница меда будет оставаться на одной высоте (рис. б). Определите плотность ρ_x неизвестной жидкости.



а б

Возможное решение. Для двух открытых сосудов влияние атмосферного давления можно не учитывать.



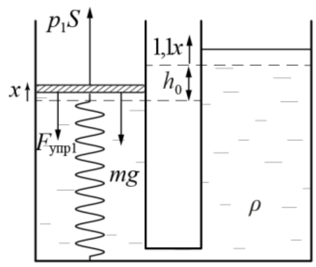
а

Рассмотрим начальную ситуацию (рис. *а*): Равновесие поршня определяется условием: $p_0S = F_{упр} + mg.$

Где p_0 – гидростатическое давление под поршнем, $F_{упр}$ – сила упругости пружины, m – масса поршня. Расписывая силы через геометрические параметры получим:

$$\rho g h_0 = \frac{mg + kx_0}{S} \quad (1)$$

Где h_0 – разность уровней жидкости в сосудах, x_0 – начальная деформация пружины, S – площадь поршня.



б

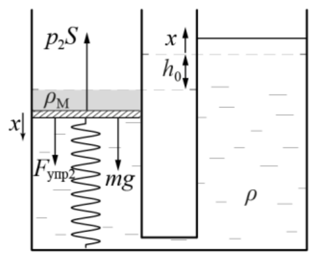
При первом варианте развития событий (рис. *б*) поршень сдвигается вверх на x, а жидкость в правом сосуде на $1{,}1x$. Тогда условие равновесия поршня примет вид:

$$\rho g(h_0 + 1{,}1x - x) = \frac{mg + k(x_0 + x)}{S} \quad (2)$$

Вычтем выражение 1 из выражения 2 и сократим на x:

$$\frac{k}{S} = 0{,}1\rho g$$

(3)



в

При втором варианте развития событий (рис. *в*) поршень сдвигается вниз на x и столько же меда доливается сверху. Жидкость в правом сосуде поднимается на x (из условия несжимаемости). Тогда условие равновесия поршня примет вид:

$$\rho g(h_0 + x + x) = \frac{mg + k(x_0 - x)}{S} + \rho_м g x \quad (4)$$

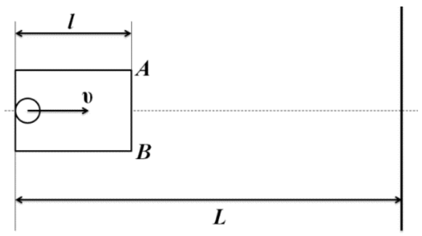
Вычтем выражение 1 из выражения 4 и сократим на x: $\rho_м g - \frac{k}{S} = 2\rho g$ (5)

Прибавим выражение 3, и окончательно получим $\rho = \frac{\rho_м}{2{,}1} = \frac{1{,}6}{2{,}1} \approx 0{,}76\,\frac{г}{см^3}$

Критерии оценивания

1) Учет атмосферного давления (или аргументированный отказ от него)	1 балл
2) Описание начальной ситуации (массивность поршня, деформация пружины перепад уровней жидкости)	1 балл
3) Описание первой ситуации	
3.1) Связь смещений и перепада уровней жидкости	1 балл
3.2) Условие равновесия поршня (или его аналог)	1 балл
3.3) Получение выражения (3)	1 балл
4) Описание второй ситуации	
4.1) Связь смещений и перепада уровней жидкости и меда	1 балл
4.2) Условие равновесия поршня (или его аналог)	1 балл
4.3) Получение выражения (5)	1 балл
5) Окончательные рассчеты и ответ	2 балла.

Задача 5. Шайба в коробке. (Колдунов Л.). Шайба массы m находится внутри коробки длины l и массы $2m$. Шайбе сообщают скорость υ. Известно, что когда коробка ударилась стороной AB о стенку, в тот же момент шайба ударился о стенку AB. При каких L это возможно?



Примечание. Удары шайбы о стенку коробки считайте абсолютно упругими, трения в системе нет, движение происходит в горизонтальной плоскости.

Возможное решение. Центру масс необходимо пройти расстояние $L-2l/3$.

Скорость центра масс $\upsilon_C=\upsilon/3$.

Время, за которое стенка AB доедет до стены равно $T=\dfrac{3L-2l}{\upsilon}$.

Скорость движения шайбы относительно коробки не изменяется.

Время между ударами $\Delta t=l/\upsilon$.

Чтобы удовлетворить условию задачи (в момент удара стенки AB о стену произошёл удар шайбы о стенку AB) необходимо чтобы $T = n\Delta t$, где n любое нечётное натуральное число.

Отсюда $L=\dfrac{2+n}{3}l$.

Критерии оценивания.

1) Обосновано равномерное движение центра масс	2 балла
2) Найдена скорость центра масс	2 балла
3) Найдено расстояние, которое необходимо преодолеть центру масс	2 балла
4) Найдено время между ударами шайбы о коробку	2 балла
5) Записано условие $T{=}n\Delta t$	1 балла
6) Окончательный ответ	1 балла

Задание можно уносить с собой!!!

Сегодня, 16 декабря 2018 года, на портале abitu.net составители олимпиады проведут онлайн-разборы задач. Время начала разборов: 7 класс 15:30, 8 класс 16:30, 9 класс 17:30, 10 класс 19:00, 11 класс 20:30.

Для участия в разборе необходимо заранее зарегистрироваться на портале abitu.net.