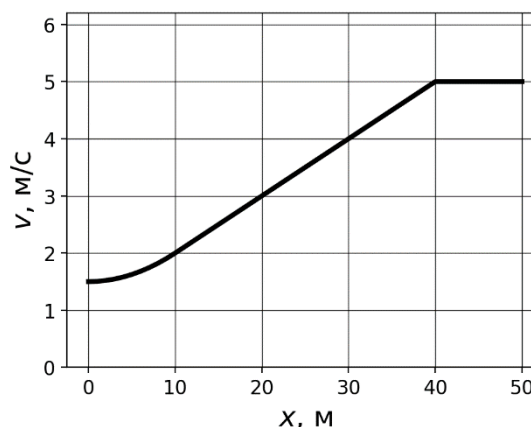


Задание 1. Звонок (10 баллов)

Школьник Петя медленно шёл по прямому коридору, неожиданно прозвенел звонок на урок, и Петя резко ускорил шаг. На рисунке приведён график зависимости мгновенной скорости Пети v от его координаты x . Найдите ускорение Пети в точке с координатой $x = 30$ м. В какой точке отрезка от 0 до 50 м ускорение Пети a максимально?



Решение

На участке от $x = 10$ м до $x = 40$ м скорость меняется по закону

$$v = v_1 + k \cdot (x - 10) \quad (1)$$

где $k = 0.1 \text{ с}^{-1}$, $v_1 = 1 \text{ м/с}$. Ускорение, по определению, равно

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2)$$

Но $\Delta x = v \cdot \Delta t$, откуда $\Delta t = \Delta x / v$.

Следовательно,

$$a = \frac{v \cdot \Delta v}{\Delta x} \quad (3)$$

Поскольку

$$k = \frac{\Delta v}{\Delta x}, \quad (4)$$

то

$$a = k \cdot v. \quad (5)$$

В точке $x = 30$ м $v = 4 \text{ м/с}$, тогда $a = 0.4 \text{ м/с}^2$.

Ответим на вопрос о том, когда a будет максимальным. На участке $10 \text{ м} < x < 40 \text{ м}$ параметр k постоянный, а максимальное значение $v = 5 \text{ м/с}$ достигается при приближении к точке $x = 40$ м, поэтому по мере приближения к этой точке ускорение будет увеличиваться и стремиться к значению $a_{\text{max}} = 0.5 \text{ м/с}^2$. На отрезке $40 \text{ м} < x < 50 \text{ м}$ ускорение равно нулю, т.к. скорость не меняется.

На участке $0 \text{ м} < x \leq 10 \text{ м}$ ускорение явно меньше a_{max} , ведь и значения скорости v и наклона касательной к графику k здесь меньше, чем при $10 \text{ м} < x < 40 \text{ м}$. (7)

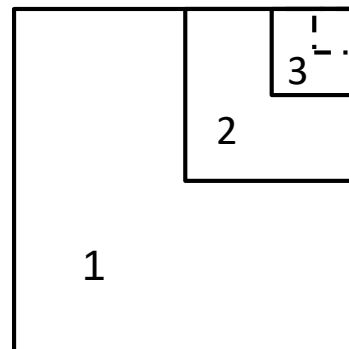
Таким образом, максимально ускорение достигается вблизи точки $x = 40$ м. Также принимается ответ "в точке $x = 40$ м". (8)

Критерий оценивания	Значение	Балл
Высказано утверждение, аналогичное формуле (1)		1
Получено соотношение (4)		2

Получены соотношение (5)		2
Получен численный ответ	$a = 0.4 \text{ м/с}^2$	1
Приведены рассуждения, аналогичные (7)		2
За утверждение (8)		2

Задание 2. Процессор (10 баллов)

В приборостроительном институте разработали первый многоядерный российский микропроцессор. Это квадратный кристалл кремния, условно поделенный на 13 рабочих секторов по следующему правилу: каждый новый сектор - квадрат со вдвое меньшей стороной, отделенный от предыдущего разметкой, как на рисунке справа. В процессе испытаний сектора с нечетными номерами нагрелись до температуры $T_1 = 50^\circ\text{C}$, а с четными – до $T_2 = 90^\circ\text{C}$, после этого испытания остановили. Какова будет конечная температура кристалла после выравнивания температур всех секторов. Размеры кристалла $20 \times 20 \times 3 \text{ мм}$, удельная теплоемкость кремния $760 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$, а плотность 2.3 г/см^3 . Теплообменом с окружающей средой пренебречь.



Возможное решение

Данных в задаче достаточно для того, чтобы найти объёмы и массы всех секторов, после чего написать уравнение теплового баланса и получить ответ. Однако, этого можно и не делать, увидев определённые закономерности в условии задачи.

Дело в том, что каждый следующий сектор имеет объём, а, значит, и массу, ровно в четыре раза меньшую, чем предыдущий. Например, если обозначить массу первого сектора m , то масса второго сектора равняется $m/4$. Разобьём теперь сектора на пары: 1-й со 2-м, 3-й с 4-м и т.д. В каждой паре больший сектор имеет температуру $T_1=50^\circ\text{C}$, а меньший - $T_2=90^\circ\text{C}$, причем их массы отличаются в 4 раза. Установившаяся температура будет одна и та же в каждой паре, следовательно, это и будет температура, установившаяся в кристалле.

Запишем уравнение теплового баланса для каждой пары:

$$cm(T - T_1) + c \frac{m}{4} (T - T_2) = 0, \quad (1)$$

где T – температура, установившаяся в паре после остановки испытаний, c – удельная теплоемкость кристалла. После сокращения общего множителя $c \cdot m$, из (1) выразим T :

$$T = \frac{T_2 + 4T_1}{5} = 58^\circ\text{C}. \quad (2)$$

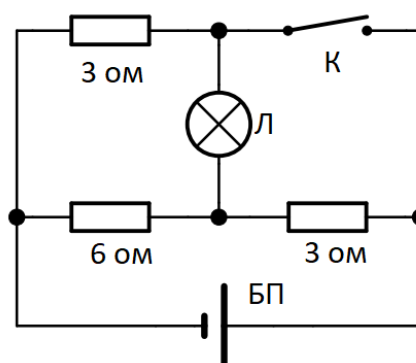
До сих пор мы никак не учитывали теплоту, заключенную в 13-м секторе, ведь пары у него нет. Масса этого сектора составляет всего лишь 10^{-12} от общей массы кристалла, а

температура имеет тот же порядок, что и установившаяся в каждой паре. Значит, учет теплоты этого сектора не приведет к сколь-нибудь видимому изменению равновесной температуры, и им можно пренебречь.

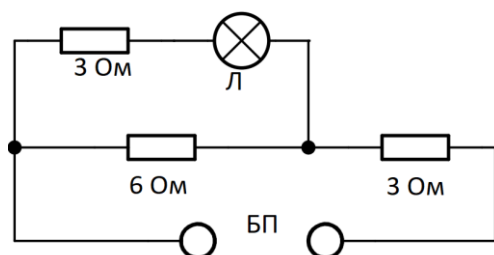
Критерий оценивания	Значение	Балл
<i>решение короткое</i>		
Догадка о принципе попарного разбиения		3
Уравнение попарного теплового баланса		3
Пренебрежение теплотой 13-го сектора		2
Получение численного ответа	58C	2
<i>решение длинное</i>		
Уравнение теплового баланса		3
Связь площади сектора с его тепловой энергией		3
Обоснованное пренебрежение секторами малой площади		2
Получение численного ответа	58C	2

Задание 3. Блок питания (10 баллов)

Мальчик Витя собрал схему и решил проверить её. Для этого он взял блок питания (БП), с неизвестной линейной характеристикой (зависимостью напряжения от силы тока). При подключении собранной схемы к нему оказалось, что лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе К. Однако, при замкнутом ключе напряжение на зажимах БП 10 В, а при разомкнутом - 8 В. Каково сопротивление лампочки и напряжение на ней? Нарисуйте линейную зависимость напряжения БП от силы тока нагрузки на нём. Определите основные параметры этой прямой. Чему будет равно напряжение БП при отключённой нагрузке?



Решение



Из условия яркость лампочки постоянна, а такое возможно только при постоянных напряжении на лампе и токе через неё. Следовательно

$$U = const, I = const \Rightarrow R = const,$$

где R - сопротивление лампы, а U - напряжение на ней.

Составим схему для разомкнутого (случай 1) ключа:

Падение напряжения на последовательном участке с лампочкой и $R=3\text{Ом}$ это сумма напряжения на лампочке U и падения напряжения на $R=3\text{Ом}$: $U + 3\frac{U}{R}$. Это напряжение равно падению напряжения U_P на $R=6\text{Ом}$, включённом параллельно этому участку:

$$U_P = U + 3\frac{U}{R}.$$

Тогда суммарная сила тока, текущего через все параллельное соединение равна сумме тока через лампочку и тока через $R=6\text{Ом}$:

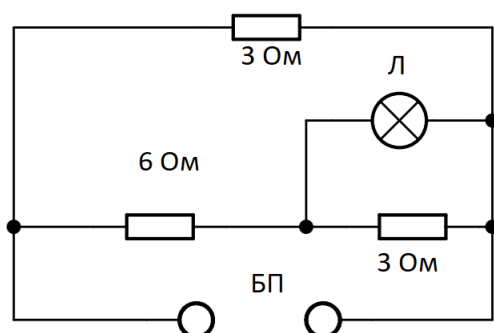
$$I_P = \frac{U_P}{6} + \frac{U}{R}.$$

Этот же суммарный ток проходит через последовательно включённый $R=3\text{Ом}$, падение напряжения на котором:

$$U_3 = 3I_P.$$

Тогда, зная что суммарное падение напряжения на всех участках цепи равно напряжению БП, получаем:

$$U + 3\frac{U}{R} + 3\left(\frac{U}{R} + \frac{U + 3\frac{U}{R}}{6}\right) = 8\text{В}$$



Составим эквивалентную схему для замкнутого (случай 2) ключа:

для этого случая аналогично имеем уравнение:

$$U + 6\left(\frac{U}{R} + \frac{U}{3}\right) = 10\text{В}$$

Решая полученную систему из 2-х уравнений, находим $R=3\text{Ом}$, $U=2\text{В}$.

Блок питания интересен тем, что напряжение у него на выходе увеличивается при увеличении нагрузки. Его можно представить как источник с линейной функцией зависимости $U_{\text{БП}}$ от силы тока I , для которой известно напряжение на клеммах при нулевом токе E и коэффициент пропорциональности r , который имеет размерность сопротивления:

$$U_{\text{БП}} = E + rI$$

Тогда имеем 2 уравнения:

$$E = U_{\text{БП2}} - rI_2$$

$$E = U_{\text{БП1}} - rI_1$$

откуда

$$U_{\text{БП2}} - U_{\text{БП1}} = \Delta U = r(I_2 - I_1),$$

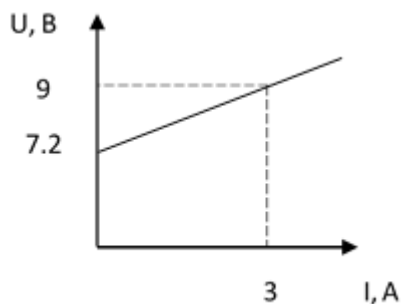
где

$$I_2 = \frac{U}{R} + \frac{U}{3} + \frac{U_{\text{БП2}}}{3}, \text{ для замкнутого ключа}$$

$$I_1 = \frac{U}{R} + \frac{U}{6} + \frac{U}{3+R}, \text{ для разомкнутого ключа.}$$

Решая эту систему, находим $r=0.6\text{Ом}$ и $E=7.2\text{В}$.

Зависимость напряжения от силы тока можно изобразить на подобном графике:



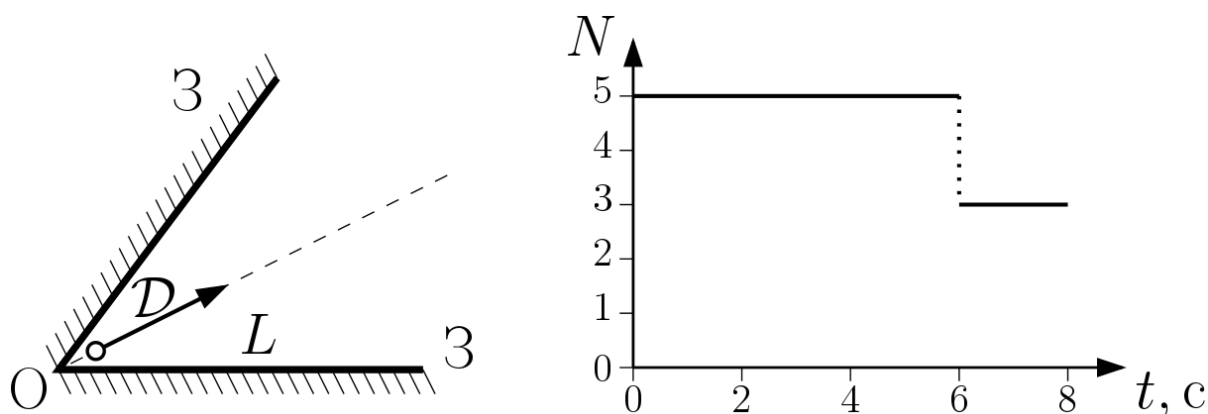
Критерий оценивания	Значение	Балл
Записаны верные уравнения для нахождения U и R		2
Найдены U и R	R=3Ом U=2В	1 1
Записаны верные уравнения для нахождения r и E		2
Найдено r	0.6	1
Найдено E	7.2	1
Построена ВАХ БП		2

Задание 4. Множественные отражения (10 баллов)

Из вершины О двугранного угла, образованного плоскими зеркалами З, каждое длиной $L = 1$ м, вылетает дрон D и движется по биссектрисе угла с постоянной скоростью. Дрон имеет камеру с углом обзора 360° в плоскости рисунка и настроен следить за другими дронами, за которые он может принять своё отражение в зеркале. На рисунке приведён начальный фрагмент зависимости числа N видимых дрону его собственных отражений от времени t с момента старта. Найдите следующие величины:

- 1) угол α между зеркалами,
- 2) скорость V дрона,
- 3) момент t времени от старта, начиная с которого дрон будет видеть лишь одно своё отражение.

Для упрощения оптических построений считать дрон шаром, радиус которого мал по сравнению с геометрическими размерами зеркал.



Решение

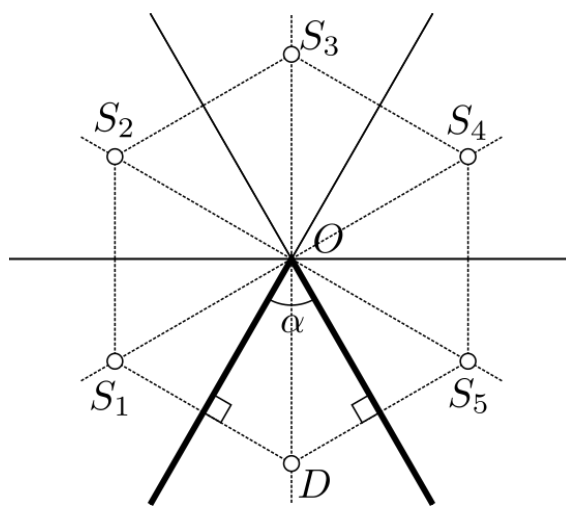
Пусть дрон D находится далеко от краёв зеркал. Построим изображения дрона в зеркалах. Для этого проведём перпендикуляры к поверхностям зеркал, и симметрично отложим на них отражения дрона. Построим также изображения отражений и т. д. Ровно 5 отражений дрона S_1 – S_5 получится в том случае, если угол α между зеркалами равен 60° , т.к. положение дрона и его отражений симметричны относительно точки O .

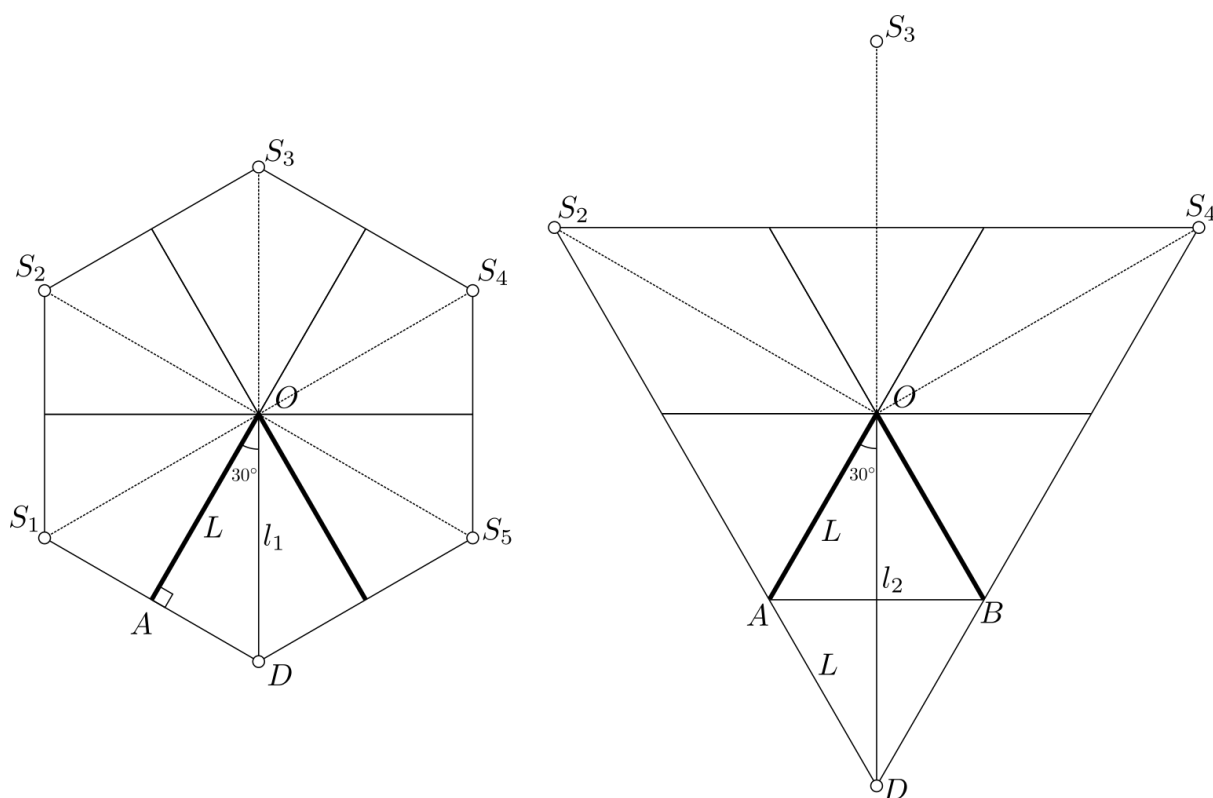
Дрон «видит» своё отражение до тех пор, пока прямая, их соединяющая, пересекает поверхность зеркала. Построим предельное положение дрона, при котором ему ещё видны отражения S_1 и S_5 . Поскольку эти отражения первого порядка, соединяющие их отрезки DS_1 , DS_5 перпендикулярны соответствующим зеркалам. Из прямоугольного треугольника AOD можно определить расстояние от дрона до точки O : $l_1 = L / \cos(30^\circ) \approx 1,155$ м. Из графика видно, что дрон прошёл это расстояние за $t_1 = 6$ с, следовательно его скорость:

$$V = \frac{l_1}{t_1} = \frac{L}{\cos(30^\circ)t_1} \approx 0,192 \text{ м/с.}$$

Определим положение дрона, при котором «пропадут» отражения S_2 и S_4 . Из симметрии задачи треугольник DS_2S_4 – равносторонний, угол ADB равен 60° . Тогда $AOBD$ представляет собой ромб, и расстояние от дрона до точки O можно найти как $l_2 = 2 \cdot L \cdot \cos(30^\circ)$. Дрон пройдёт это расстояние за время:

$$t_2 = \frac{l_2}{V} = \frac{2L \cos(30^\circ)}{\frac{L}{\cos(30^\circ)t_1}} = \frac{3t_1}{2} = 9 \text{ с.}$$





Критерий оценивания	Значение	Балл
Построены изображения дрона в зеркалах вдали от краёв зеркал		2
Определён угол между зеркалами	60°	2
Указаны условия видимости отражений S_1 , S_5 (прохождение DS_1 , DS_5 через край зеркала), или сделано верное построение		2
Определена скорость дрона	0.19м/с	1
Указаны условия видимости отражений S_2 , S_4 (прохождение DS_2 , DS_4 через край зеркала), или сделано верное построение		2
Определён момент t времени, начиная с которого дрон будет видеть лишь одно отражение	$t_2 = 9\text{с}$	1

Задание 5. Забитая игла (15 баллов)

Петя провёл эксперимент со шприцем. Поршень шприца (игла снята в этот момент) был выдвинут до отметки 20 мл, после чего на шприц была надета игла (Рисунок 1). Петя попробовал медленно нажать на поршень и выпустить воздух через иглу. Но игла оказалась забита и воздух через нее не проходил. Петя нажал на поршень что было сил, но игла не очистилась. После того как Петя перестал давить на поршень, он заметил, что поршень не вернулся в исходное состояние, а остановился, примерно, на половине пути (Рисунок 2). Определите силу трения поршня о стенки шприца. Форма шприца –

правильная цилиндрическая. Дно поршня имеет ровную плоскую поверхность. Деформацией шприца и объемом воздуха в носике иглы пренебречь. Атмосферное давление считать равным 100 кПа. Считать, что при сжатии давление газа изменяется обратно пропорционально изменению объема $P \sim \frac{1}{V}$.



Рисунок 1 – Положение поршня в шприце перед тем как на него установили иглу

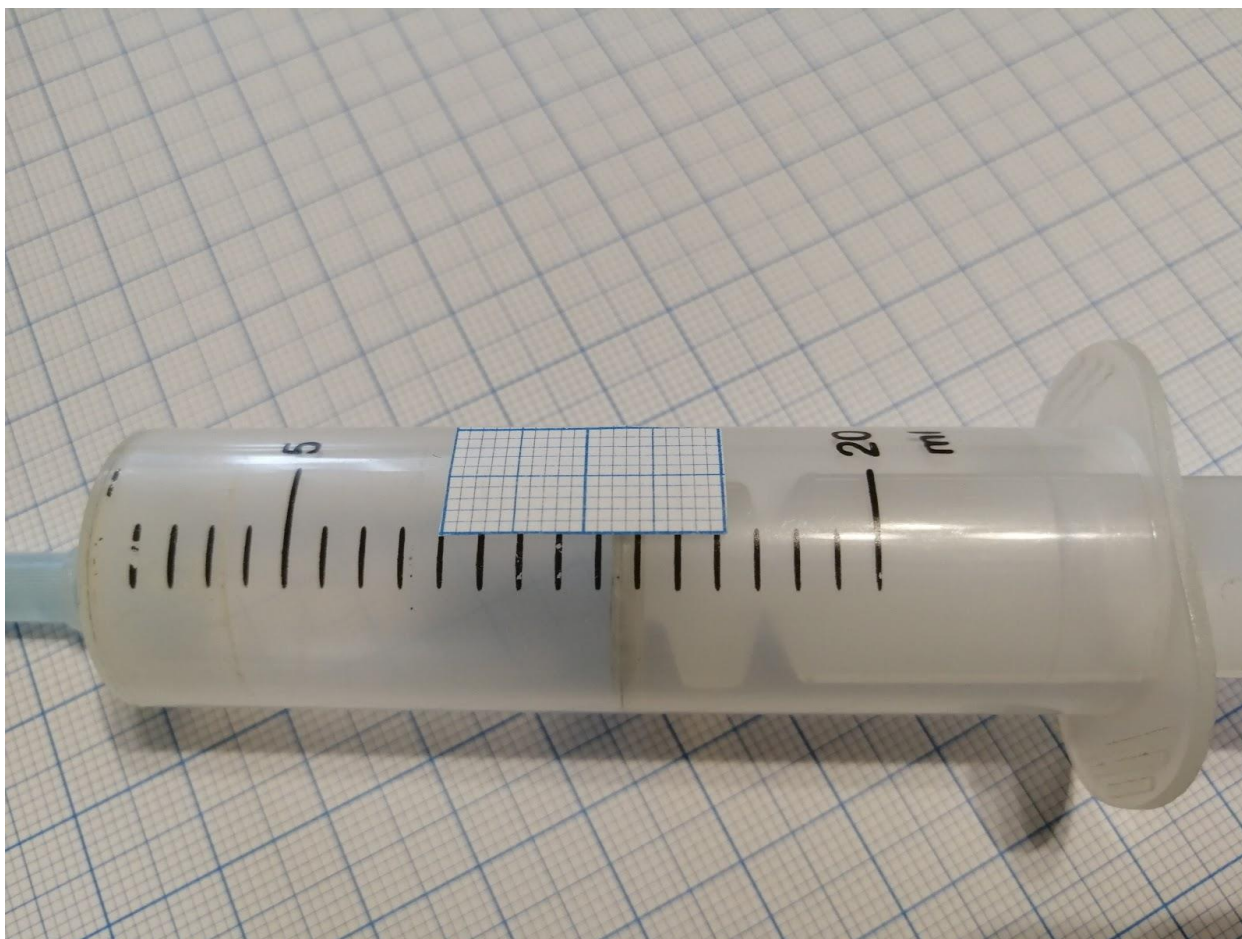


Рисунок 2 – Положение поршня в шприце после того, как его нажали до упора и отпустили

Решение

На поршень в положении, показанном на рисунке 2, действуют три силы. Сила давления газа в шприце, которая выталкивает поршень, сила атмосферного давления и сила трения, которые препятствуют перемещению поршня наружу. Запишем действующие силы в векторной форме:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} = 0 \quad (1)$$

где $\vec{F}_a$ - сила, вызванная атмосферным давлением, $\vec{F}_1$ - сила, вызванная давлением газа внутри шприца, $\vec{F}_{\text{тр}}$ - сила трения между поршнем и стенками шприца.

После проекции сил на ось, расположенную вдоль оси шприца получаем уравнение:

$$F_a + F_{\text{тр}} = F_1.$$

Давление равно

$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = PS.$$

Подставляя это в уравнение (1) получаем:

$$F_{\text{тр}} = P_1 S - P_a S = S(P_1 - P_a), \quad (2)$$

где S – площадь поршня, P_1 – давление внутри шприца, P_a – атмосферное давление.

Площадь поршня можно найти из следующих соображений. Нам известен объем шприца в начальном положении, поршень стоит на отметке 20 мл. Объем шприца для

первоначального состояния определяется формулой $V_0 = Sl_0$, где S – площадь поршня, l_0 – расстояние от дна шприца до плоскости поршня. Следовательно, площадь поршня можно получить по формуле

$$S = \frac{V_0}{l_0}. \quad (3)$$

Давление в шприце P_1 можно найти из соображений обратной пропорциональности между объемом и давлением $P \sim \frac{1}{V}$. Если учесть, что $V_0 = Sl_0$, получаем $P \sim \frac{1}{Sl}$. Так как площадь поршня в ходе эксперимента не изменяется, можно записать $P \sim \frac{1}{l}$, то есть давление обратно пропорционально изменению расстояния между поршнем и дном шприца.

$$\frac{P_1}{P_a} = \frac{l_0}{l_1} \Rightarrow P_1 = P_a \frac{l_0}{l_1}, \quad (4)$$

где P_a – атмосферное давление, l_1 – расстояние от поршня до дна шприца после нажатия на поршень.

Подставляя (3) и (4) в (2) получаем:

$$F_{\text{тр}} = \frac{V_0 P_a}{l_0} \left(\frac{l_0}{l_1} - 1 \right) \quad (5)$$

Формула (5) – итоговая формула для расчетов.

Неизвестными остаются величины l_0 и l_1 . Мы не можем измерить непосредственно эти расстояния, но можно оценить сколько миллиметров одно деление на шприце, используя миллиметровку на фотографии.

Выберем 2 деления на шприце, которые совпадают с делениями на миллиметровке (указано стрелками на рисунке).

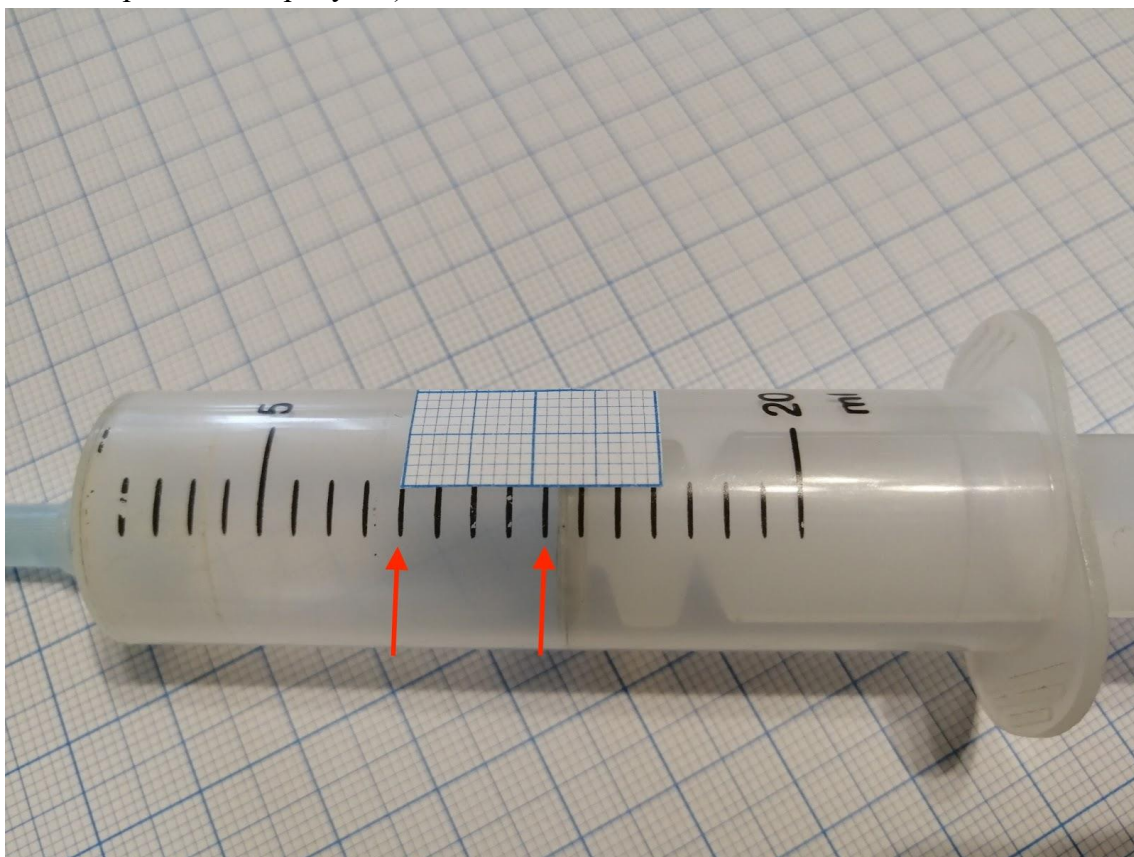


Рисунок – выбор делений для определения расстояния между делениями.

Для указанного выбора получается, что 4 деления на шприце соответствуют 11 миллиметрам (вполне допустимо, что при решении задачи будет рассчитано расстояние для 5 делений). Следовательно, расстояние между делениями составляет примерно 2,75 мм. Находим расстояния l_0 и l_1 . Для l_1 : до дна поршня 13 полных делений, это равно $13 \cdot 2,75 = 35,7$ мм. От ближайшего деления до поршня по миллиметровке еще один миллиметр. Итого $l_1 = 35,7 + 1 = 36,7 \approx 37$ мм. Аналогичным образом находим $l_0 = 55$ мм.

Подставляем полученные величины в формулу (5) и получаем результат $F_{тр} = 17,69$ Н.

	Критерии оценивания	Баллы
1	Верно описаны действующие на поршень силы, записано уравнение баланса сил.	2
2	Выведена пропорциональная связь между линейным перемещением шприца и изменением давления в шприце $P_1/P_a = l_0/l_1$	2
3	Выведена итоговая формула для силы трения	3
4	Определено расстояние между делениями на шприце	2
5	Определены расстояния l_0 и l_1	2
6	Получено значение силы трения в диапазоне от 16 до 19 Н	4