# Районный тур 2019/20. 11 класс. I вариант

**Задача 1.**

Обозначим искомое давление газа через $p_0$. Рассмотрим первое начало термодинамики (закон сохранения энергии) для системы, включающей лёд, воду и идеальный газ. Пусть в результате опускания поршня объём сосуда под ним уменьшился на малую величину $\Delta V > 0$, тогда внешние силы совершили над системой положительную работу

$$\Delta A' = p_0 \Delta V\,. \tag{1}$$

Сосуд теплоизолирован, поэтому увеличение внутренней энергии системы целиком определяется работой (1). Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры. Поскольку последняя не изменилась, заключаем, что внутренняя энергия газа остаётся прежней. Следовательно, энергия, переданная системе, идет на плавление льда. Обозначим массу расплавленного льда через $\Delta m$. Для превращения такого количества льда в воду необходимо затратить энергию $\lambda \Delta m$. Таким образом,

$$p_0 \Delta V = \lambda \Delta m\,. \tag{2}$$

Так как без изменения остаётся не только температура, но и давление идеального газа, объём, занимаемый газом, не меняется ($pV/T = \mathrm{const}$ для постоянного количества вещества). Объём расплавленного льда равен $\Delta V_{\text{л}} = \Delta m/\rho_{\text{л}}$, объём получившейся из него воды равен $\Delta V_{\text{в}} = \Delta m/\rho_{\text{в}}$. Плотность льда меньше, чем плотность воды, поэтому в результате процесса плавления суммарный объём льда и воды уменьшается, при этом, согласно условию задачи,

$$\Delta V_{\text{л}} - \Delta V_{\text{в}} = \Delta V \quad \Leftrightarrow \quad \Delta m \left(\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}}\right) = \Delta V\,. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), находим, что давление газа должно быть равно

$$p_0 = \frac{\lambda \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}\,. \tag{4}$$

Ответ: давление газа равно $p_0 = \lambda \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}}/(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})$.

**Задача 2.**

Построим сначала изображения предмета и источника в зеркале (П’ и И’, соответственно). Для того, чтобы наблюдатель увидел предмет, нужно, чтобы прямая НП’ проходила через зеркало, т. е. точка А должна принадлежать зеркалу (см. рис. 1). Чтобы изображение предмета было освещённым, необходимо, чтобы прямая ПИ’ тоже проходила через зеркало. Таким образом, минимальный размер зеркала определяется длиной отрезка АВ.

Вычислим теперь длину этого отрезка. Поскольку отрезки ОА и ОВ являются средними линиями треугольников ПНП’ и ПИ’П’, соответственно, их длины составляют $a/2$ и $b/2$, соответственно. Таким образом, минимальный размер зеркала равен $(a+b)/2$.

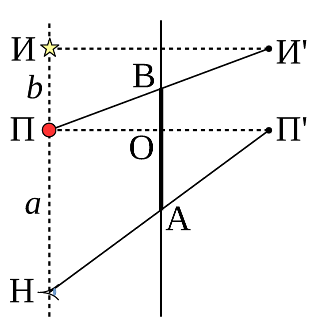

Рис. 1

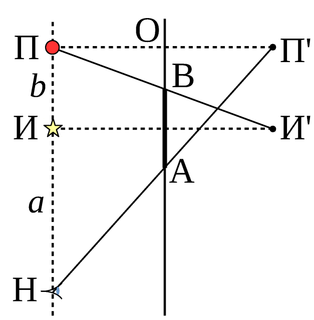

Рис. 2

Необходимые построения для второго случая, когда предмет и источник поменяли местами, представлены на рис. 2. В этом случае нетрудно вычислить искомую длину отрезка AB: $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{OA}| - |\mathrm{OB}| = (a+b)/2 - b/2 = a/2$.

Ответ: Минимальный размер зеркала в первом случае составляет $(a+b)/2$, во втором случае равен $a/2$.

**Задача 3.**

При движении заряженной частицы в области однородного магнитного поля индукции $B$ на неё действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = qvB$, при этом траектория частицы представляет собой дугу окружности радиуса $R$ (см. рис. 3),

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{mv}{qB}\,. \tag{5}$$

За время движения по дуге

$$T_B = \frac{2\alpha R}{v} = \frac{2m\alpha}{qB} \tag{6}$$

частица смещается вдоль плоскости $\gamma$ на расстояние

$$L_B = 2R\sin\alpha = \frac{2mv\sin\alpha}{qB}\,. \tag{7}$$

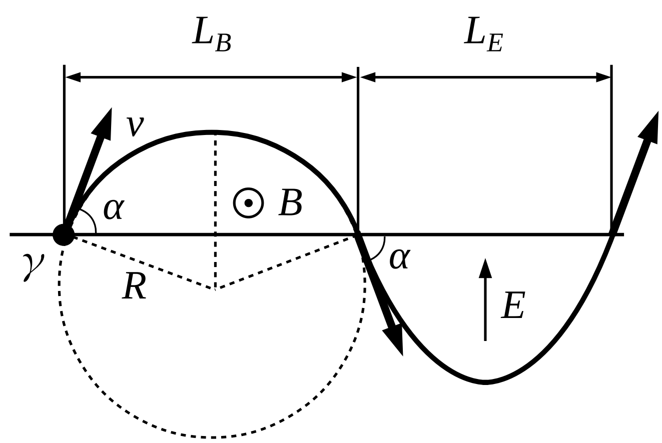


Рис. 3

При движении в магнитном поле скорость частицы не изменяется, поэтому она влетает в электрическое поле со скоростью $v$ под тем же углом $\alpha$. При движении частицы в области однородного электрического поля на неё действует постоянная сила $qE$, направленная к плоскости $\gamma$. Частица двигается по параболе с постоянным ускорением

$$ma = qE \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{qE}{m}\,. \tag{8}$$

Время движения по параболе равно

$$T_E = \frac{2v\sin\alpha}{a} = \frac{2mv\sin\alpha}{qE}\,. \tag{9}$$

За время $T_E$ частица смещается вдоль плоскости $\gamma$ на расстояние

$$L_E = \frac{v^2\sin 2\alpha}{a} = \frac{mv^2\sin 2\alpha}{qE}\,. \tag{10}$$

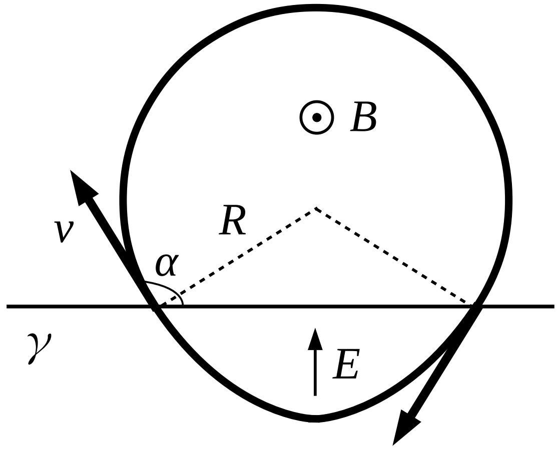


Рис. 4

Когда частица по параболе подлетает к плоскости $\gamma$, её скорость вновь становится равной $v$, поэтому она влетает в магнитное под углом $\alpha$ с первоначальной скоростью. Затратив время $T_B+T_E$ и сместившись вдоль плоскости $\gamma$ на расстояние $L_B+L_E$, она возвращается к исходному состоянию, после чего траектория повторяется. Таким образом, средняя скорость заряженной частицы за большой промежуток времени равна средней скорости на одном периоде,

$$v_{\text{ср}} = \frac{L_B + L_E}{T_B + T_E} = \frac{(E + Bv\cos\alpha)\sin\alpha}{\alpha E + BV\sin\alpha}\, v\,. \tag{11}$$

Исследуем выражение (11):

- При $\alpha \to 0$ и числитель, и знаменатель в (11) стремятся к нулю. Необходимо раскрыть неопределённость вида 0/0. Для этого вспомним, что при малых углах $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\cos\alpha \approx 1$, поэтому средняя скорость при $\alpha = 0$ совпадает с начальной скоростью $v$, а частица летит вдоль плоскости $\gamma$ по прямой.
- При $\alpha = \pi$ формула (11) дает $v_{\text{ср}} = 0$. При таком значении угла $\alpha$ частица вращается по окружности радиуса $R$ в магнитном поле и вообще не залетает в электрическое поле.
- Наконец, если $E \leqslant Bv$, то средняя скорость $v_{\text{ср}}$ обращается в ноль при таком угле $\alpha > \pi/2$, что $\cos\alpha = -E/(Bv)$, то есть при $\alpha = \pi - \arccos(E/Bv)$. Соответствующая траектория изображена на рис. 4. Заметим, что $\alpha = \pi$, если $E = Bv$.

Ответ: Средняя скорость частицы за большой промежуток времени даётся выражением (11). Траектория частицы представляет замкнутую линию при $\alpha = \pi$ (окружность) и при $\alpha = \pi - \arccos(E/Bv)$, если $E < Bv$ (см. рис. 4).

**Задача 4.**

См. решение задачи 2 в варианте I для 10 класса.

Ответ: $u \approx 1.6v$

**Задача 5.**

Заметим, что не любой стержень можно заменить на нерастяжимую нить, поскольку на некоторые стержни со стороны шарниров действуют силы, работающие на сжатие. Определим сперва, куда направлены силы реакций со стороны стержней, действующие на шарниры. Для этого рассмотрим равновесие каждого шарнира в отдельности. Важно отметить, что силы со стороны стержней всегда направлены вдоль самих стержней, т. к. моменты сил должны быть скомпенсированы. Предлагается следующая цепочка рассуждений (шарниры занумерованы на рис. 5):

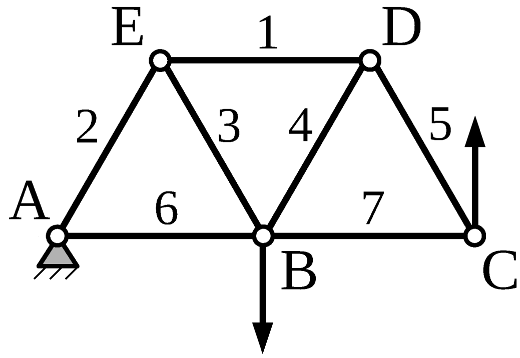


Рис. 5

- Чтобы компенсировать внешнюю силу, действующую на шарнир C вертикально вверх, со стороны стержня 5 должна действовать сила, направленная вправо и вниз. Из условия равновесия самого стержня 5 следует, что на шарнир D он действует влево и вверх.
- Чтобы горизонтальная проекция сил, действующих на шарнир C, была равна нулю, сила со стороны стержня 7 должна быть направлена влево. Значит сила со стороны стержня 7, действующая на шарнир B, направлена вправо.
- Сила со стороны стержня 4, действующая на шарнир D, направлена влево и вниз. Следовательно, на шарнир B действует сила, направленная вправо и вверх.
- Со стороны стержня 1 на шарнир D действует сила, направленная вправо. Значит на шарнир E действует сила, направленная влево.
- Со стороны стержней 2 и 3 на шарнир E должны действовать силы, направленные вправо-вверх и вправо-вниз, соответственно. Тогда на шарниры A и B действуют силы, направленные влево-вниз и влево-вверх, соответственно.
- Если рассмотреть равновесие системы в целом, то становится ясно, что сила со стороны опоры A направлена вертикально (вверх или вниз). Тогда из условия равновесия шарнира A следует, что сила со стороны стержня 6 направлена вправо. Значит на шарнир B действует сила, направленная влево.

Таким образом, со стороны шарниров на стержни действуют силы, направленные так, как показано на рис. 6. Мы видим, что заменить на нити можно только стержни 3, 4, 6 и 7. Это означает, что требуется рассмотреть четыре электрические схемы и найти их общие сопротивления. Используя правила вычис-

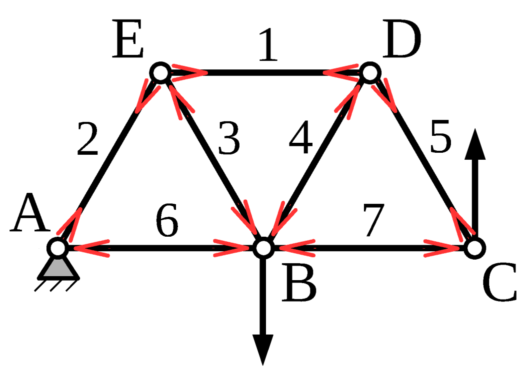


Рис. 6

ления сопротивлений при последовательном и параллельном подключении проводников, можно найти следующие значения:

1. На нити заменены стержни 3, 4 и 6: $R_{\text{общ}} = (203/313)r$.
2. На нити заменены стержни 3, 4 и 7: $R_{\text{общ}} = (258/313)r$.
3. На нити заменены стержни 3, 6 и 7: $R_{\text{общ}} = (26/33)r$.
4. На нити заменены стержни 4, 6 и 7: $R_{\text{общ}} = (27/33)r$.

Теперь осталось сравнить числа 258/313 и 27/33. Если привести эти дроби к общему знаменателю, то числители будут равны $258 \cdot 33 = 8514$ и $27 \cdot 313 = 8451$, соответственно. Таким образом, первая дробь больше.

Ответ: Максимальное сопротивление достигается при замене стержней 3, 4 и 7 и равно $(258/313)r$.

# Районный тур 2019/20. 11 класс. II вариант

**Задача 1.**

Обозначим искомое давление газа через $p_0$. Рассмотрим первое начало термодинамики (закон сохранения энергии) для системы, включающей лёд, воду и идеальный газ. Пусть в результате поднятия поршня объём сосуда под ним увеличился на малую величину $\Delta V > 0$, тогда газ совершил положительную работу

$$\Delta A = p_0 \Delta V \,. \tag{12}$$

Сосуд теплоизолирован, поэтому работа (12) полностью выполнена за счёт уменьшения внутренней энергии системы. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры. Поскольку последняя не изменилась, заключаем, что внутренняя энергия газа остаётся прежней. Следовательно, уменьшение внутренней энергии связано с кристаллизацией воды и превращением её в лёд. Обозначим массу кристаллизовавшейся воды через $\Delta m$. При превращения такого количества воды в лёд выделяется энергию $\lambda \Delta m$. Таким образом,

$$p_0 \Delta V = \lambda \Delta m \,. \tag{13}$$

Так как без изменения остаётся не только температура, но и давление идеального газа, объём, занимаемый газом, не меняется ($pV/T = \mathrm{const}$ для постоянного количества вещества). Объём кристаллизовавшейся воды равен $\Delta V_{\text{в}} = \Delta m/\rho_{\text{в}}$, объём получившегося из неё льда равен $\Delta V_{\text{л}} = \Delta m/\rho_{\text{л}}$. Плотность льда меньше, чем плотность воды, поэтому в результате процесса кристаллизации суммарный объём льда и воды увеличился, при этом, согласно условию задачи,

$$\Delta V_{\text{л}} - \Delta V_{\text{в}} = \Delta V \quad \Leftrightarrow \quad \Delta m \left( \frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right) = \Delta V \,. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), находим, что давление газа должно быть равно

$$p_0 = \frac{\lambda \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} \,. \tag{15}$$

Ответ: давление газа равно $p_0 = \lambda \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}} / (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})$.

**Задача 2.**

Построим сначала изображения предмета и источника в зеркале (П' и И', соответственно). Для того, чтобы наблюдатель увидел предмет, нужно, чтобы прямая НП' проходила через зеркало, т. е. точка А должна принадлежать зеркалу (см. рис. 7). Чтобы изображение предмета было освещённым, необходимо, чтобы прямая ПИ' тоже проходила через зеркало. Таким образом, минимальный размер зеркала определяется длиной отрезка AB.

Вычислим теперь длину этого отрезка. Поскольку отрезки OA и OB являются средними линиями треугольников ПНП' и ПИ'П', соответственно, их длины составляют $a/2$ и $b/2$, соответственно. Таким образом, минимальный размер зеркала равен $(a+b)/2$.

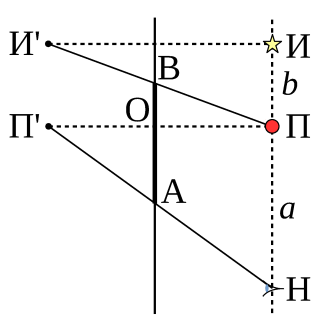


Рис. 7

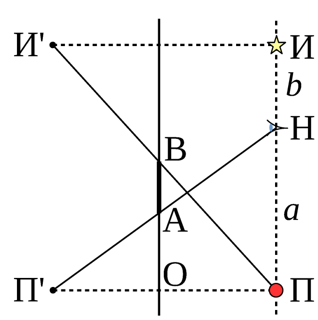


Рис. 8

Необходимые построения для второго случая, когда наблюдатель и предмет меняются местами, представлены на рис. 8. В этом случае нетрудно вычислить искомую длину отрезка AB: $|AB| = |OB| - |OA| = (a+b)/2 - a/2 = b/2$.

<u>Ответ</u>: Минимальный размер зеркала в первом случае составляет $(a+b)/2$, во втором случае равен $b/2$.

**Задача 3.**

При движении заряженной частицы в области однородного электрического поля напряженности $E$ на неё действует постоянная сила $qE$, направленная к плоскости $\gamma$. Частица двигается по параболе (см. рис. 9) с постоянным ускорением

$$ma = qE \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{qE}{m}\,. \tag{16}$$

Время движения по параболе равно

$$T_E = \frac{2v\sin\alpha}{a} = \frac{2mv\sin\alpha}{qE}\,. \tag{17}$$

За время $T_E$ частица смещается вдоль плоскости $\gamma$ на расстояние

$$L_E = \frac{v^2\sin 2\alpha}{a} = \frac{mv^2\sin 2\alpha}{qE}\,. \tag{18}$$

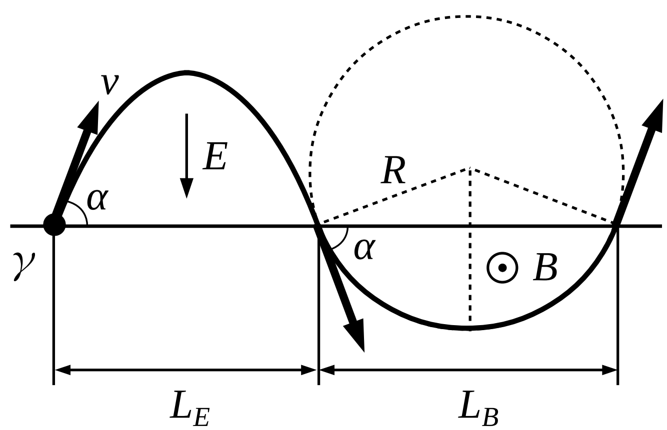


Рис. 9

Когда частица подлетает по параболе к плоскости $\gamma$, её скорость вновь становится равной $v$, поэтому она влетает в магнитное под углом $\alpha$ с той же скоростью, что и в электрическое поле. При движении в магнитном поле на частицу действует сила Лоренца $F_Л = qvB$, при этом траектория частицы представляет собой дугу окружности радиуса $R$,

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{mv}{qB}\,. \tag{19}$$

За время движения по дуге

$$T_B = \frac{2\alpha R}{v} = \frac{2m\alpha}{qB} \tag{20}$$

частица смещается вдоль плоскости $\gamma$ на расстояние

$$L_B = 2R\sin\alpha = \frac{2mv\sin\alpha}{qB}\,. \tag{21}$$

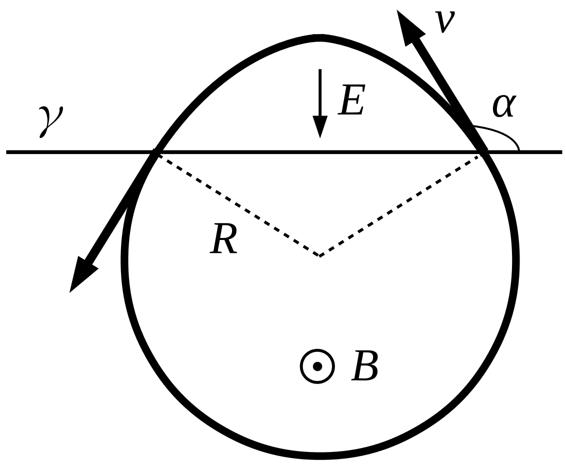


Рис. 10

При движении в магнитном поле скорость частицы не изменяется, поэтому она влетает в электрическое поле с первоначальной скоростью $v$ под углом $\alpha$. Затратив время $T_B + T_E$ и сместившись вдоль плоскости $\gamma$ на расстояние $L_B + L_E$, частица возвращается к исходному состоянию, после чего траектория повторяется. Таким образом, средняя скорость заряженной частицы за большой промежуток времени равна средней скорости на одном периоде,

$$v_{\text{ср}} = \frac{L_E + L_B}{T_E + T_B} = \frac{(E + Bv\cos\alpha)\sin\alpha}{\alpha E + BV\sin\alpha}\, v\,. \tag{22}$$

Исследуем выражение (22):

- При $\alpha \to 0$ и числитель, и знаменатель в (22) стремятся к нулю. Необходимо раскрыть неопределённость вида $0/0$. Для этого вспомним, что при малых углах $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\cos\alpha \approx 1$, поэтому средняя скорость при $\alpha = 0$ совпадает с начальной скоростью $v$, и частица летит вдоль плоскости $\gamma$ по прямой.
- При $\alpha = \pi$ формула (22) дает $v_{\text{ср}} = 0$. При таком значении угла $\alpha$ частица вращается по окружности радиуса $R$ в магнитном поле и вообще не влетает в электрическое поле.
- Наконец, если $E \leqslant Bv$, то средняя скорость $v_{\text{ср}}$ обращается в ноль при таком угле $\alpha > \pi/2$, что $\cos\alpha = -E/(Bv)$, то есть $\alpha = \pi - \arccos(E/Bv)$. Соответствующая траектория изображена на рис. 10. Заметим, что $\alpha = \pi$ при $E = Bv$.

Ответ: Средняя скорость частицы за большой промежуток времени даётся выражением (22). Траектория частицы представляет замкнутую линию при $\alpha = \pi$ (окружность) и при $\alpha = \pi - \arccos(E/Bv)$, если $E < Bv$ (см. рис. 10).

**Задача 4.**

См. решение задачи 2 в варианте II для 10 класса.

Ответ: $u \approx 1.8v$

**Задача 5.**

Заметим, что не любой стержень можно заменить на нерастяжимую нить, поскольку на некоторые стержни со стороны шарниров действуют силы, работающие на сжатие. Определим сперва, куда направлены силы реакций со стороны стержней, действующие на шарниры. Для этого рассмотрим равновесие каждого шарнира в отдельности. Важно отметить, что силы со стороны стержней всегда направлены вдоль самих стержней, т. к. моменты сил должны быть скомпенсированы. Предлагается следующая цепочка рассуждений (шарниры занумерованы на рис. 11):

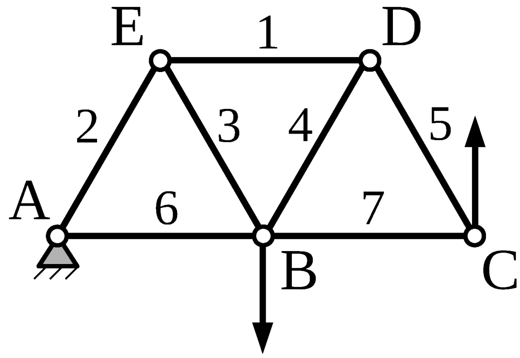


Рис. 11

- Чтобы компенсировать внешнюю силу, действующую на шарнир C вертикально вверх, со стороны стержня 5 должна действовать сила, направленная вправо и вниз. Из условия равновесия самого стержня 5 следует, что на шарнир D он действует влево и вверх.
- Чтобы горизонтальная проекция сил, действующих на шарнир C, была равно нулю, сила со стороны стержня 7 должна быть направлена влево. Значит сила со стороны стержня 7, действующая на шарнир B, направлена вправо.
- Сила со стороны стержня 4, действующая на шарнир D, направлена влево и вниз. Следовательно, на шарнир B действует сила, направленная вправо и вверх.
- Со стороны стержня 1 на шарнир D действует сила, направленная вправо. Значит на шарнир E действует сила, направленная влево.
- Со стороны стержней 2 и 3 на шарнир E должны действовать силы, направленные вправо-вверх и вправо-вниз, соответственно. Тогда на шарниры A и B действуют силы, направленные влево-вниз и влево-вверх, соответственно.
- Если рассмотреть равновесие системы в целом, то становится ясно, что сила со стороны опоры A направлена вертикально (вверх или вниз). Тогда из условия равновесия шарнира A следует, что сила со стороны стержня 6 направлена вправо. Значит на шарнир B действует сила, направленная влево.

Таким образом, со стороны шарниров на стержни действуют силы, направленные так, как показано на рис. 12. Мы видим, что заменить на нити можно только стержни 3, 4, 6 и 7. Это означает, что требуется рассмотреть четыре электрические схемы и найти их общие сопротивления. Используя правила вычис-

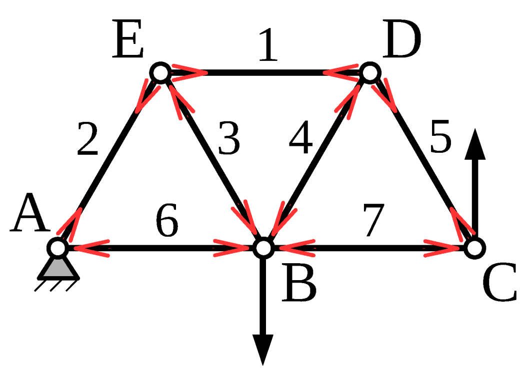


Рис. 12

ления сопротивлений при последовательном и параллельном подключении проводников, можно найти следующие значения:

1. На нити заменены стержни 3, 4 и 6: $R_{\text{общ}} = (41/71)r$.
2. На нити заменены стержни 3, 4 и 7: $R_{\text{общ}} = (26/71)r$.
3. На нити заменены стержни 3, 6 и 7: $R_{\text{общ}} = (30/79)r$.
4. На нити заменены стержни 4, 6 и 7: $R_{\text{общ}} = (29/79)r$.

Теперь видно, что максимальное сопротивление возникает при замене стержней 3, 4 и 6.

Ответ: Максимальное сопротивление достигается при замене стержней 3, 4 и 6 и равно $(41/71)r$.