

Задание 1. Друзья-туристы (10 баллов)

Два друга, Вася и Петя, запланировали водный поход по реке. Василий, отпуск которого длиннее, стартует первый, идет против течения, а затем возвращается по течению к точке старта. Петя также стартует против течения, но позднее, утром в тот день, когда Вася начинает возвращаться к точке старта. Скорость реки 3 км/ч, у Пети и Васи одинаковые байдарки, на которых они греблей развивают 6 км/ч. Учитывая, что они не могут затратить на поход более 10 дней, гребут в день ровно 5 часов и меняют направление движения только после ночных стоянок, определите на сколько километров максимально Вася сможет отойти вверх по течению? Сколько дней он будет идти против течения? На каком расстоянии от точки старта он встретится с Петей?

Решение

V_p - скорость реки, V – скорость байдарки, Td – количество часов гребли в день, N_1 – количество дней, которые Вася идет по течению, N_2 – против.

Для начала найдем расстояние, которое байдарка пройдет в день против и по течению:

$$S_1 = Td \cdot (V - V_p) \cdot N_1 \text{ - против течения,}$$
$$S_2 = Td \cdot (V + V_p) \cdot N_2 \text{ - по течению.}$$

Поскольку точка старта и финиша совпадают, очевидно, что $S_1 = S_2$. Кроме того, $N_1 + N_2 \leq 10$. Эти уравнения образуют систему, из которой можно найти все параметры.

$N_1 = \frac{V+V_p}{V-V_p} N_2$ и следовательно $N_2 \left(\frac{2V}{V-V_p}\right) \leq 10$. Подставим цифры: $N_2 \left(\frac{12}{6-3}\right) \leq 10$. В итоге, поскольку требуется максимальное расстояние, мы берем $N_2 = 2$. Отсюда $N_1 = 6$. Максимальное расстояние получится равным 90 км.

Петя стартует в тот день, когда Вася поворачивает к точке старта, то есть на 7 день. Для определения точки встречи мы вновь запишем путь байдарок по против течению.

$$S_1 = t \cdot (V - V_p) \text{ - путь Пети против течения,}$$
$$S_2 = t \cdot (V + V_p) \text{ - путь Васи по течению, } t \text{ - время с момента старта. -}$$

Точка встречи будет найдена из равенства из условия, что $S_1 + S_2 = 90$ км. Число часов гребли t оказывается равным $t = 7,5$, а место встречи будет совпадать с путем, проделанным Петей, и составит 22,5 километра от точки старта.

Критерий оценивания	Значение	Балл
Записаны уравнения для пути байдарки Василия по и против течения за время похода		2
Получено неравенство для числа дней по и против течения		2
Найдено число дней, которое Вася идет против течения	$N_1 = 6$	1

Найдено максимальное расстояние, на которое отойдет Вася	90 км	2
Записано условие встречи Васи и Пети		2
Найдено расстояние точки встречи от места старта	22,5 км	1

Задание 2. Смеситель (10 баллов)

Вася любит принимать горячую ванну температурой 40°C . Он открыл горячий ($T_{\text{воды}} = 80^{\circ}\text{C}$) кран и холодный ($T_{\text{воды}} = 20^{\circ}\text{C}$) кран и ушел пить чай. Давление и температура воды, вытекающей из кранов не меняется. Вода наполнила ванну и излишки стали вытекать через ограничительное отверстие. Вернувшись, Василий обнаружил, что температура воды больше не меняется, но слишком высокая – аж 60°C . Какое соотношение потоков воды из кранов было изначально? Во сколько раз ему нужно уменьшить поток воды из горячего крана, чтобы спустя продолжительное время температура воды в ванне установилась на Васиних любимых 40°C ? Плотность воды постоянна и не зависит от температуры.

Решение

В задаче не указан объем ванны и теплоемкость материала из которого она сделана, а также скорость потока из каждого крана. Поскольку вода поступает непрерывно и соотношение между холодной и горячей водой не меняется, вся поступающая вода будет перемешиваться с водой в ванне и с той же скоростью вытекать из нее. Соответственно, вся вода в ванне и поступающая в нее спустя продолжительное время будут иметь одинаковую температуру.

Пользуясь тем, что плотность воды в обоих кранах и ванне одинакова, мы можем перейти от рассмотрения потока как объема воды в единицу времени к рассмотрению его как массы воды в единицу времени. Пусть из горячего крана в ед. времени вытекает $m_{\text{г}}$ воды, а из холодного $m_{\text{х}}$. Они перемешиваются и становятся одинаковой температуры в 60°C . Запишем уравнение теплового баланса:

$$Cm_{\text{г}} \Delta T + Cm_{\text{х}} \Delta T = 0 \text{ или } Cm_{\text{г}}(80 - 60) + Cm_{\text{х}}(20 - 60) = 0.$$

Отсюда, сократив теплоемкость воды, мы получим соотношение между потоками горячей и холодной воды: $m_{\text{г}} \div m_{\text{х}} = 2 \div 1$.

После изменения соотношения потоков будет происходить два процесса: вытеснение теплой воды в ванной за счет поступающей, а также перемешивание с поступающей из крана, и как следствие, охлаждение всей ванны. Поскольку после изменения потоков прошло продолжительное время, а температура должна установиться на 40°C , а не просто пройти это точку, мы также как и в первом случае считаем, что температура поступающей в ванну воды совпадает с температурой воды, покидающей ее через сливное отверстие.

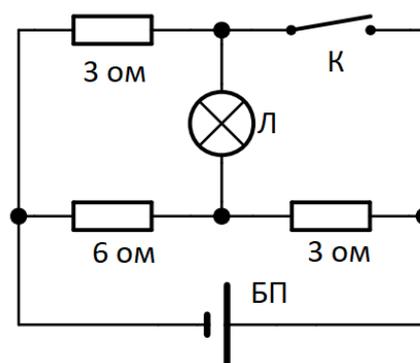
Используя уравнение теплового баланса, найдем соотношение для потоков воды в этом случае: $Cm_{\text{г}}(80 - 40) + Cm_{\text{х}}(20 - 40) = 0$, откуда $m_{\text{г}} \div m_{\text{х}} = 1 \div 2$. Таким образом, мы должны уменьшить поток горячей воды в 4 раза.

Критерий	Баллы
----------	-------

Утверждение о том, что спустя продолжительное время температура ванны и поступающей воды будет одинаковой	3
Записано уравнение теплового баланса для исходного соотношения потоков	3
Найдено соотношение потоков горячей и холодной воды для температуры ванны 60 С	2
Найдено соотношение потоков горячей и холодной воды для температуры ванны 40 С	1
Получен ответ во сколько раз нужно уменьшить поток горячей воды	1

Задание 3. Лампочка (10 баллов)

Мальчик Петя собрал схему и решил проверить её. Для этого он нашел блок питания с напряжением 9 В. При подключении собранной схемы к блоку оказалось, что лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе К. Каково сопротивление лампочки и напряжение на ней в этом эксперименте?



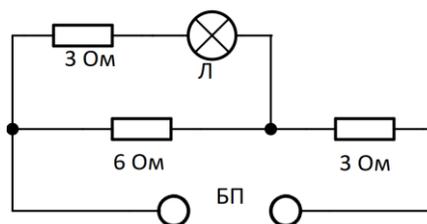
Решение

Из условия яркость лампочки постоянна, а такое возможно только при постоянных напряжении на лампе и токе через неё. Следовательно

$$U = const, I = const \Rightarrow R = const,$$

где R – сопротивление лампы, а U – напряжение на ней.

Составим схему для разомкнутого (случай 1) ключа:



Падение напряжения на последовательном участке с лампочкой и $R=3\text{Ом}$ это сумма напряжения на лампочке U и падения напряжения на $R=3\text{Ом}$: $U + 3\frac{U}{R}$. Это напряжение равно падению напряжения U_p на $R=6\text{Ом}$, включённом параллельно этому участку:

$$U_p = U + 3\frac{U}{R}.$$

Тогда суммарная сила тока, текущего через все параллельное соединение равна сумме тока через лампочку и тока через $R=6\text{Ом}$:

$$I_p = \frac{U_p}{6} + \frac{U}{R}.$$

Этот же суммарный ток проходит через последовательно включённый $R=3\text{Ом}$, падение напряжения на котором:

$$U_3 = 3I_p.$$

Тогда, зная что суммарное падение напряжения на всех участках цепи равно напряжению БП, получаем:

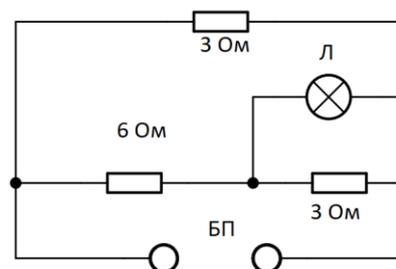
$$U + 3\frac{U}{R} + 3\left(\frac{U}{R} + \frac{U+3\frac{U}{R}}{6}\right) = 9\text{В} \quad (1)$$

Составим схему для замкнутого (случай 2) ключа:

для этого случая аналогично

$$U + 6 \left(\frac{U}{R} + \frac{U}{3} \right) = 9V \quad (2)$$

Решая полученную систему из 2-х уравнений, находим $R=1\text{Ом}$, $U=1\text{В}$.

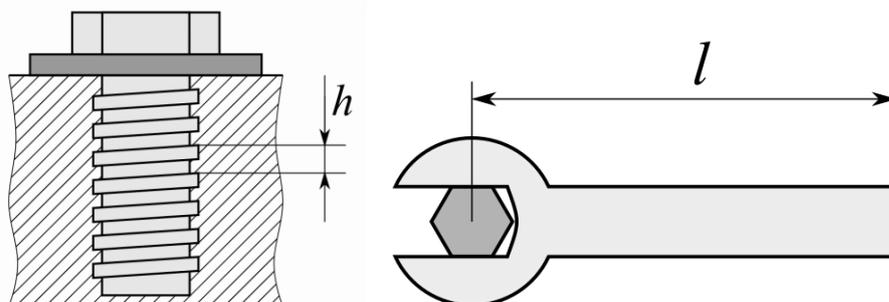


Критерий оценивания	Значение	Балл
Нарисованы эквивалентные схемы (по 1 баллу за схему)		2
Записаны верные уравнения для нахождения U и R, аналогичные (1) и (2)		4
Верно найдено R	1Ом	2
Верно найдено U	1В	2

Задание 4. Затянем крепеж (10 баллов)

Николай проходит практику на заводе. Ему дали задание с помощью гаечного ключа затянуть болты, прижимающие обшивку изделий к корпусу. Болты имеет шаг резьбы $h = 2$ мм. Какой максимальный выигрыш в силе он сможет получить, если воспользуется для этих целей большим ключом с длиной $l = 30$ см? Трением пренебречь.

Примечание: выигрыш в силе – это отношение силы сжатия болтом обшивки изделия, к силе, с которой Коля давит на ключ.



Решение

Николай поворачивает ключ на малый угол φ , причем, чтобы получить максимальный выигрыш в силе, он прикладывает силу F_1 к самому краю ключа перпендикулярно нему, при этом точка приложения силы будет двигаться по дуге длиной $l\varphi$. Тогда работа A_1 , которую он совершает, равна:

$$A_1 = F_1 l \varphi$$

За каждый полный оборот (на угол 2π радиан) болт опускается на высоту h , сжимая при этом обшивку. Соответственно, работа A_2 , которую совершает болт, сжимая обшивку с силой F_2 при повороте ключа на малый угол φ , равна:

$$A_2 = F_2 h \frac{\varphi}{2\pi}$$

Согласно золотому правилу механики, простые механизмы не дают выигрыша в работе, и тогда

$$A_1 = A_2$$

$$F_1 l \varphi = F_2 h \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{2\pi l}{h} = 942$$

В случае, если сила была приложена не к концу ключа, мы не получим максимальный выигрыш, поскольку вместо l в формуле будет расстояние от центра болта до точки приложения силы x , а очевидно, что $x < l$.

Допускается также решение, где работы A_1 и A_2 рассчитаны для одного или нескольких оборотов ключа.

Критерий оценивания	Значение	Балл
Использование закона сохранения энергии (золотого правила механики)		4
Связь сил с работой	$A_1 = F_1 l \varphi$ $A_2 = F_2 h \frac{\varphi}{2\pi}$	2 2
Результирующее соотношение	$\frac{F_2}{F_1} = \frac{2\pi l}{h}$	2

Задание 5. Дверь в бомбоубежище (15 баллов)

Школьники были на экскурсии в бомбоубежище. Среди различных средств защиты им показывали бронированные рольставни, которые поднимаются, наматываясь на вал с электроприводом (рисунок 1). Пете стали очень интересны характеристики этих ставен. Он, во время подъема рольставен, оценил скорость подъема нижней точки от времени и занес данные в таблицу (таблица 1). Постройте график зависимости скорости подъема рольставен от времени и помогите Пете определить угловую скорость вращения вала (ω), радиус этого вала (R), толщину ставен (d) и сколько полных оборотов делает вал до полного подъема. Ставни, в опущенном состоянии, полностью размотаны с вала.

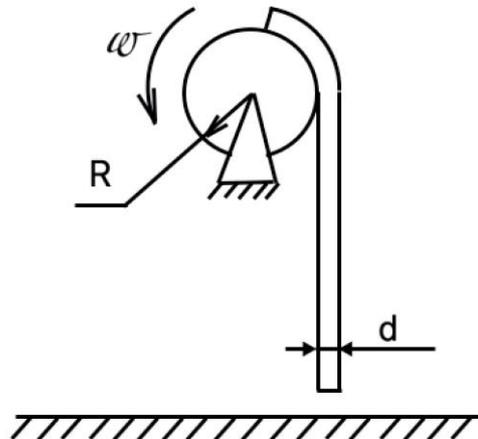


Рисунок 1 – схема рольставен

Таблица 1 – скорость подъема рольставен от времени

t, с	0,5	1	1,5	2	2,25	2,5	3	3,5	4
v, м/с	0,314	0,314	0,314	0,314	0,33	0,345	0,345	0,345	0,345
t, с	4,25	4,5	5	5,5	6	6,25	6,5	7	
v, м/с	0,361	0,377	0,377	0,377	0,377	0,392	0,408	0,408	

Решение

График зависимости скорости подъема ставен от времени представлен на рисунке 1.1. Из графика видно, что скорость подъема имеет линейные участки и изменяется ступенчато между ними. Ступени обусловлены тем, что после каждого оборота вала следующий слой ставен наматывается на вал с увеличенным радиусом, который меняется на толщину ставен d с каждым оборотом. Три ступени означают, что ставни полностью поднимаются за три полных оборота вала. По ширине ступени на графике можно определить время одного оборота, которое составит 2 секунды. Зная время одного оборота, можно определить угловую скорость

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \frac{2\pi n}{t}. \quad (1)$$

В нашем случае угловая скорость равна $\omega = \pi = 3,14$ рад/с.

Линейная скорость связана с угловой следующим соотношением

$$v = \omega R, \quad (2)$$

где v – линейная скорость, ω – угловая скорость, R – радиус вала.

По условию, в опущенном состоянии ставни полностью размотаны, следовательно, из данных на первом обороте, можно найти радиус вала. Линейная скорость для первого оборота равна $v = 0,314$ м/с. Подставляя в (2) значения линейной и угловой скоростей, находим значение радиуса R вала, $R = 0.1$ м.

Толщину d ставен найдем из изменения линейной скорости подъема ставен. На втором обороте ставни будут уже наматываться на вал с радиусом $(R+d)$, где d – толщина ставен. Линейная скорость выразится следующим образом:

$$v = \omega(R + d). \quad (3)$$

Скорость на втором обороте равна $v = 0,345$ м/с. Из уравнения (3) найдем толщину ставен $d = 0,01$ м.

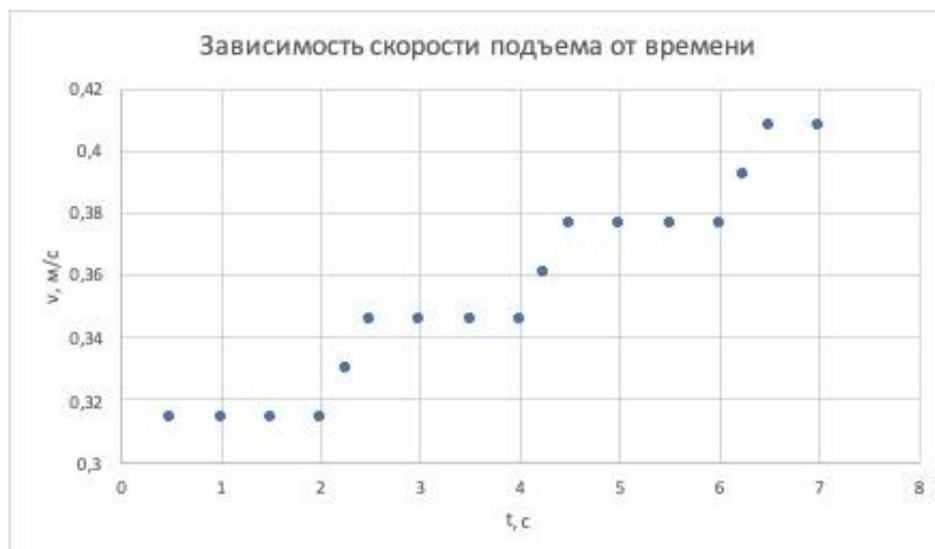


Рисунок 1.1 – зависимость скорости подъема ставен от времени

Ответ: Количество оборотов для подъема ставен $N=3$, угловая скорость вращения вала $\omega = \pi = 3,14$ рад/с, радиус вала $R = 0.1$ м, толщина ставен $d = 0,01$ м.

	Критерий оценивания	Балл
1	На миллиметровой бумаге корректно построен график в координатах $v(t)$ оси подписаны и оцифрованы по осям выбран удобный для этой задачи масштаб кривая графика занимает не менее 70% листа построен график	До 3 0,5 0,5 0,5 1,5
2	Описан или пояснен вид графика и/или характер зависимости. Есть объяснение почему график имеет ступенчатый вид, чем обусловлены ступени.	1
3	Определено количество оборотов вала для подъема ставен	2
4	Описан метод нахождения угловой скорости вала	1
5	Верно определена угловая скорость вала	2
6	Описан метод нахождения радиуса вала	1
7	Верно определен радиус вала	2
8	Описан метод нахождения толщины ставен	1
9	Верно определена толщина ставен	2
	Итого	15