10 класс

1. (10 баллов) Брошенное вертикально вверх тело находилось в полете 4 с и за последнюю секунду прошло путь, который втрое больше пути, пройденного за первую секунду. Во сколько раз время падения от высшей точки до земли больше времени подъема от начальной высоты до верхней точки?

Ответ: В 2,2 раза.

Решение: Обозначим через t_1 время подъема тела от начальной высоты до верхней точки, а через t_2 время падения от высшей точки до земли. По условию задачи $t_1 + t_2 = 4$ с. Путь, пройденный за первую секунду, можно записать как

$$\frac{gt_1^2}{2} - \frac{g(t_1-1)^2}{2},$$

где g – ускорение свободного падения. Здесь учтено, что $t_1 > 1$ с (иначе, очевидно, не может быть выполнено условие задачи), и путь от начальной высоты до высшей точки записан как путь падения с верхней точки до начальной высоты в силу обратимости движения. Путь, пройденный за последнюю секунду движения, можно записать как разницу путей падения от высшей точки до земли $(gt_2^2/2)$ и пройденного за время t_2 -1 с:

$$\frac{gt_2^2}{2} - \frac{g(t_2-1)^2}{2} = gt_2 - \frac{g}{2}.$$

Записывая условие

$$gt_2 - \frac{g}{2} = 3\left[\frac{gt_1^2}{2} - \frac{g(t_1-1)^2}{2}\right]$$

и подставляя в него $t_2 = 4 - t_1$, получаем

$$t_1 = \frac{5}{4}.$$

Тогда

$$t_2 = 4 - t_1 = \frac{11}{4},$$

а искомое отношение равно

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{11}{5} = 2{,}2.$$

Разбалловка: Понято, что время подъема больше 1 с – 1 балл.
Записана формула для пути, пройденного за первую секунду – 2 балла.
Записана формула для пути, пройденного за последнюю секунду – 2 балла.
Найдено время подъема – 2 балла.
Найдено время падения – 2 балла.
Получен правильный ответ – 1 балл.

2. (10 баллов) Тело, брошенное под углом к горизонту, находилось в полете время T и упало на расстоянии L от точки броска. Считая, что угол между начальной скоростью тела и горизонтом больше 45°, найти момент времени, когда разность вертикального и горизонтального удалений тела от точки броска достигает максимума.

Ответ: Максимум разности удалений достигается в момент $t_{\max} = \frac{T}{2} - \frac{L}{gT}$.

Решение: Вертикальное удаление тела от точки броска, равное высоте подъема тела над землей, зависит от времени как

$$h(t) = V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2},$$

где V_0 – начальная скорость тела и α - угол, под которым бросили тело. Горизонтальное удаление тела изменяется со временем как

$$\ell(t) = V_0 \cos\alpha\, t.$$

Зависимость от времени разности удалений является квадратичной функцией:

$$h(t) - \ell(t) = V_0(\sin\alpha - \cos\alpha)t - \frac{gt^2}{2},$$

график этой функции представляет собой параболу с максимумом в точке

$$t_{\max} = \frac{V_0(\sin\alpha - \cos\alpha)}{g}.$$

Используя формулы для времени и дальности полета

$$T = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}, \qquad L = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = V_0 \cos\alpha\, T,$$

выражаем $t_{\max}$ через данные задачи:

$$t_{\max} = \frac{T}{2} - \frac{L}{gT}.$$

Разбалловка: Записана зависимость от времени высоты подъема тела – 1 балл.
Записана зависимость от времени горизонтального удаления – 1 балл.
Записано выражение для разности удалений – 1 балл.
Найдено выражение для $t_{\max}$ через V_0 и α – 3 балла.
Записано выражение для времени полета T – 1 балл.
Записано выражение для дальности полета L – 1 балл.
Получен ответ для $t_{\max}$ через данные задачи – 2 балла.

3. (10 баллов) Брусок массы $2m$ положили на наклонную грань расположенного на горизонтальном столе клина массы m с углом 30° при основании. Трение между клином и столом отсутствует. Найти коэффициент трения между бруском и наклонной гранью клина, если действующая между ними сила трения оказалась равной $mg/2$.

Ответ: Коэффициент трения равен $\sqrt{3}/5 \approx 0{,}35$.

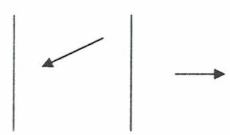
Решение: Прежде всего отметим, что при заданном значении силы трения тела не могут находиться в покое. Действительно, действующая на брусок сила тяжести имеет компоненту вдоль наклонной грани клина $2mg \sin 30° = mg$, которая превышает силу трения $F_{тр} = mg/2$. Следовательно, брусок будет соскальзывать с клина, при этом клин будет двигаться горизонтально.

Расставим действующие на брусок и клин силы (см. рис., действующая на клин сила тяжести и сила реакции со стороны стола опущены, чтобы не загромождать чертеж). Направим ось x перпендикулярно наклонной грани клина и запишем II закон Ньютона для бруска в проекции на эту ось в виде

$$2ma_{1x} = 2mg\frac{\sqrt{3}}{2} - N,$$

где N – сила нормальной реакции клина. Учитывая, что ускорение клина направлено горизонтально вправо, запишем II закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось в виде

$$ma_2 = \frac{N}{2} - mg\frac{\sqrt{3}}{4}.$$



Записывая далее кинематическую связь (равенство ускорений клина и бруска в проекции на перпендикулярное к наклонной грани клина направление)

$$a_{1x} = \frac{a_2}{2},$$

находим из системы трех записанных уравнений силу реакции клина

$$N = \frac{5\sqrt{3}}{6}mg.$$

Из формулы для силы трения скольжения $F_{тр} = \mu N$ выражаем коэффициент трения в виде

$$\mu = \frac{F_{тр}}{N}$$

и, подставив в это выражение найденную силу N и $F_{тр} = mg/2$, окончательно получаем

$$\mu = \sqrt{3}/5 \approx 0{,}35.$$

Разбалловка: Расставлены векторы сил – 1 балл.
Понято, что тела будут двигаться – 1 балл.
Записан II закон Ньютона для бруска в проекции на нормаль к наклонной грани клина – 1 балл.
Записан II закон Ньютона для клина в проекции на горизонталь – 1 балл.
Записана кинематическая связь – 2 балла.
Найдена сила N - 2 балла.
Записана формула $\mu = \frac{F_{тр}}{N}$ – 1 балл.
Найден коэффициент трения – 1 балл.

4. (10 баллов) Между двумя шарами разной массы, двигающимися навстречу друг другу с равными скоростями, происходит центральный абсолютно упругий удар. При каком отношении масс шаров более легкий шар получит в результате удара максимальную долю суммарной кинетической энергии шаров?

Ответ: Искомое отношение масс равно 3:1.

Решение: Если возможна остановка более массивного шара после удара, то в этом случае всю кинетическую энергию получит легкий шар. Проверим возможность такого результата соударения. Обозначив массы легкого и тяжелого шаров через m и M соответственно, а их скорости перед ударом через V, запишем законы сохранения импульса и энергии для случая остановки тяжелого шара после соударения:

$$MV - mV = mu, \qquad \frac{MV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = \frac{mu^2}{2}.$$

Рассматривая эти соотношения как систему уравнений относительно u и M/m и исключая u, находим

$$M/m = 3.$$

Разбалловка: Записан закон сохранения импульса – 1 балл.
Записан закон сохранения энергии – 1 балл.
Понято, что тяжелый шар должен остановиться – 5 баллов.
Получен ответ – 3 балла.

5. (10 баллов) В сосуде находится газ в равновесном состоянии. Отношение числа молекул, имеющих скорости вдоль оси x в интервалах 300±1 м/с и 500±1 м/с, равно 5/2. Чему равно отношение частот ударов молекул из этих интервалов в стенку сосуда, перпендикулярную оси x?

Ответ: Частота ударов молекул из интервала 300±1 м/с в 1,5 раза больше, чем из другого интервала.

Решение: Частота ударов (число ударов за 1 с) молекул из узкого интервала скорости пропорциональна произведению концентрации молекул данного сорта на скорость молекул. В равновесном состоянии в интервале 300±1 м/с молекул в 5/2 раза больше, чем в интервале 500±1 м/с. Таким образом, отношение частот находим как

$$\frac{5 \cdot 300 \text{ м/с}}{2 \cdot 500 \text{ м/с}} = \frac{3}{2}.$$

Разбалловка: Указано, что частота ударов пропорциональна произведению концентрации молекул данного сорта на компоненту скорости молекул вдоль нормали к стенке – 4 балла.
Понято, что в каком интервале скоростей молекул больше – 2 балла.
Получен правильный ответ – 4 балла.