Ключи ответов

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 10. В исключительных случаях допускаются оценки, кратные 0,5 балла. Проверка работ осуществляется Жюри олимпиады согласно стандартной методике оценивания решений:

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
10	*Полное верное решение*
8-9	*Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение*
7-8	*Решение в целом верное, однако, содержит существенные ошибки (не физические, а математические)*
5-6	*Найдено решение одного из двух возможных случаев*
3-4	*Есть понимание физики явления, но не найдено одно из необходимых для решения уравнений, в результате полученная система уравнений не полна и невозможно найти решение*
1-2	*Есть отдельные уравнения, относящиеся к сути задачи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)*
0	*Решение неверное, или отсутствует*

Задача 1.

На невесомом стержне расположены три груза массами m_1, m_2 и M, как показано на рисунке 67. Массы грузов связаны следующими соотношениями: $m_1 = m_2 — m$; $M = 4m$. Определите угловую скорость стержня в тот момент, когда он займет вертикальное положение.

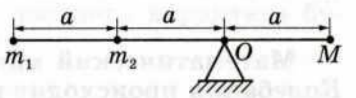

Рис. 67

Решение:

Определим сначала, в каком направлении будет вращаться стержень. Вычислим сумму моментов сил относительно точки O:

$$-mg2a - mga + 4mga = mga.$$

Сумма моментов сил положительная, значит, стержень будет вращаться по часовой стрелке. Линейные скорости будут соответственно равны:

$v_1 = 2a\omega$; $v_2 = a\omega$; $v = a\omega$ (по формуле $v = R\omega$).

Кинетические энергии соответственно равны:

$$E_{1к} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(2a\omega)^2}{2} = 2ma^2\omega^2;$$

$$E_{2к} = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m(a\omega)^2}{2} = \frac{ma^2\omega^2}{2};$$

$$E = \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{4m(a\omega)^2}{2} = 2ma^2\omega^2.$$

Примем сам стержень за нулевой уровень потенциальной энергии.

Грузы массами m_1 и m_2 окажутся наверху на высотах 2a и a, и их потенциальная энергия будет положительной:

$$E_{1п} = mg2a;\ E_{2п} = mga.$$

Груз массой М окажется внизу, и его потенциальная энергия буде отрицательной:

$$E_п = -Mga = -4mga.$$

Применим закон сохранения механической энергии. В горизонтальном положении скорость стержня равна нулю и потенциальная энергия тоже равна нулю. Значит, в вертикальном положении полная механическая энергия также равна нулю:

$\boldsymbol{E_{1к} + E_{2к} + E_к + E_{1п} + E_{2п} + E_п = 0;}$

$2ma^2\omega^2 + 0.5\ ma^2\omega^2 + 2\ ma^2\omega^2 + mg2a + mga - 4mga = 0;$

$9\ ma^2\omega^2 - 2mga = 0;$

$\omega^2 = 2g/9a$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{2g}{9a}}$

Задача 2

Из вертикальной трубки высыпается песок, причем диаметр его струи остается равным диаметру трубки. Скорость песчинок у конца трубки 1 м/с. Во сколько раз средняя плотность песка в струе на расстоянии 2,4 м от конца трубки будет меньше, чем внутри трубки у ее конца? Считать, что каждая песчинка падает свободно.

Решение:

Средняя плотность песка в струе ρ может быть представлена как количество песчинок N в единице объема $\Delta V = S\Delta h$, где S – площадь поперечного сечения трубки, Δh - элемент высоты.

$$\rho = \frac{N}{S \cdot \Delta h}.$$

Если рассматривать очень малые значения Δh, можно считать движение песчинок на этих участках равномерным.

Скорость песчинок у конца трубки $v_1 = 1$ м/с, скорость v_2 песчинок на расстоянии H=2,4 м от конца трубки найдем из кинематического уравнения

$H = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$, отсюда $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gH} = 7(м/с)$

Таким образом, средняя плотность песка обратно пропорциональна скорости песчинок на элементе высоты Δh:

$$\rho = \frac{N}{S \cdot v \cdot \Delta t}.$$

Таким образом, средняя плотность песка в струе на расстоянии 2,4 м от конца трубки будет меньше в 7 раз, чем внутри трубки у ее конца.

Ответ: меньше в 7 раз.

Задача 3.
В плоский конденсатор, в котором расстояние между пластинами d и емкость С, ввели параллельно обкладкам металлическую пластину толщиной a таких же размеров, как размеры обкладки конденсатора. Определите емкость конденсатора с пластиной. Площадь пластин конденсатора S.

Решение:
Под действием электрического поля на гранях пластины появляются электрические заряды противоположных знаков, в результате чего образуется система из двух последовательно соединенных конденсаторов. Сама пластина служит проводником, который соединяет конденсаторы. Расположение пластины указано на рисунке 102. Применяем формулу емкости при последовательном соединении конденсаторов:

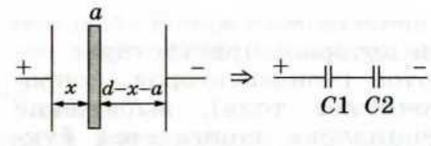

Рис. 102

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 \varepsilon S} + \frac{d-a-x}{\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{d-a}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Отсюда

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d-a}.$$

Единицы физических величин очевидны.
Ответ интересен тем, что расстояние x не вошло в формулу. Значит, положение пластины внутри конденсатора роли не играет.

Задача 4.

Электрическая цепь состоит из источника с ЭДС 180В, двух вольтметров и реостата с полным сопротивлением 3 кОм (рис. 131). Подвижный контакт делит катушку реостата в отношении $1:2$, считая от левого конца. Определите показания вольтметров, если их внутренние сопротивления равны r_1 = 5 кОм, r_2 = 6 кОм. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

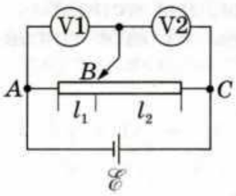

Рис. 131

Решение:
Прежде всего нужно привести схему к такому виду, чтобы ее можно было рассчитывать по формулам последовательного и параллельного соединений. Для этого требуется произвести две операции. Во-первых, нужно на схему вынести сопротивления вольтметров, во-вторых, два участка реостата представить как два последовательно соединенных резистора, которые соединяются проводником с нулевым сопротивлением. Значения сопротивлений будут относиться так же, как длины, и поэтому левое сопротивление равно R/3, а правое равно $2R/3$.

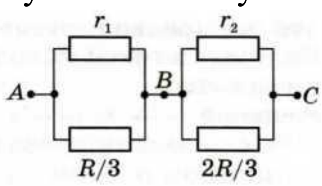

Рис. 132

С учетом замечаний участок *ABC* примет вид, указанный на рисунке 132.
Дальнейшие действия — это обычный расчет эквивалентной схемы.
Определим сопротивления параллельных участков и цепи в целом:

$$R_{AB} = \frac{r_1 \frac{1}{3} R}{r_1 + \frac{1}{3} R} = \frac{r_1 R}{3r_1 + R}; \quad R_{BC} = \frac{r_2 \frac{2}{3} R}{r_2 + \frac{2}{3} R} = \frac{2r_2 R}{3r_2 + 2R};$$

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = \frac{R\,(9r_1 r_2 + 2Rr_1 + 2Rr_2)}{(3r_1 + R)\,(3r_2 + 2R)}.$$

На основании закона пропорциональности находим требуемые напряжения:

$$\frac{U_1}{R_{AB}} = \frac{\mathscr{E}}{R_{AC}} \Rightarrow U_1 = \frac{\mathscr{E} r_1 (3r_2 + 2R)}{9r_1 r_2 + 2Rr_1 + 2Rr_2};$$

$$\frac{U_2}{R_{BC}} = \frac{\mathscr{E}}{R_{AC}} \Rightarrow U_2 = \frac{2\mathscr{E} r_2 (3r_1 + R)}{9r_1 r_2 + 2Rr_1 + 2Rr_2}.$$

После вычислений находим: U_1 = 64 В, U_2 = 116 В.
Ответ. U_1 = 64 В; U_2 = 116 В.
Результат легко проверить. Сумма напряжений должна быть равна ЭДС:
64 + 116 = 180. Как видим, ответы подтверждаются. Если бы вольтметры были идеальными, напряжения в соответствии с законом пропорциональности были бы 60 и 120 В.

Задача 5.

Газовый процесс изображен в координатах *(V, p)* (рис. 75).
Постройте график этого процесса в координатах *(T, V)*.

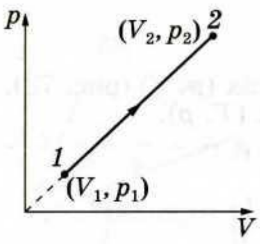

Рис. 75

Решение:

В этом процессе меняются все параметры.
Поэтому воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Из заданного графика следует, что давление прямо пропорционально объему.

Угловой коэффициент прямой равен $\frac{p_1}{V_1}$.
Следовательно, уравнение прямой имеет вид

$$p = \frac{p_1}{V_1} V.$$

Подставим это значение давления в уравнение Менделеева — Клапейрона и найдем зависимость между объемом и температурой.
По характеру этой зависимости и построим график (рис. 76):

$$pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \frac{p_1}{V_1} V^2 = \frac{m}{M} RT \Rightarrow V = \sqrt{\frac{mRV_1}{p_1 M}} \sqrt{T} = A\sqrt{T},$$

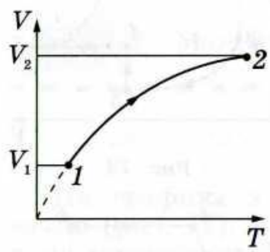

Рис. 76

где *A* — постоянное число.
На уроках алгебры строили графики функции

$$y = k\sqrt{x}.$$

Именно такой вид будет у графика.