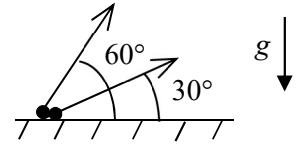


10 класс

1. (10 баллов) Два тела бросили одновременно из одной точки на поверхности земли с одинаковой по величине начальной скоростью V_0 . Векторы начальных скоростей тел лежат в одной вертикальной плоскости и составляют с горизонтом углы 30° и 60° (см. рис.). Какого максимального значения достигнет расстояние между телами? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ: Через время V_0/g расстояние между телами достигнет максимального значения, равного $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \frac{V_0^2}{g} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \frac{V_0^2}{g} \approx 0,52 \frac{V_0^2}{g}$.

Решение: Наиболее короткое решение получается, если рассмотреть движение одного тела относительно другого. Поскольку ускорения тел одинаковы (равны ускорению свободного падения), то их относительная скорость не меняется со временем ни по направлению, ни по величине и остается равной ее начальному значению:

$$V_{\text{отн}} = 2V_0 \sin 15^\circ = V_0 \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

При этом расстояние R между телами растет со временем по закону $R = V_{\text{отн}} t$ до тех пор, пока одно из тел не упадет на землю. Первым, через время $t_1 = V_0/g$, упадет тело, брошенное под углом 30° . В момент t_1 тело, брошенное под углом 60° , уже пройдет верхнюю точку своей траектории и заведомо будет приближаться к уже упавшему телу. Действительно, точки падения обоих тел совпадают из-за равенства дальностей полета ($\sin 2\alpha$ принимает одинаковые значения при $\alpha = 30^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$). Таким образом, с момента t_1 тела начнут сближаться, а максимальное расстояние между ними достигается в момент t_1 и составляет

$$R_{\text{max}} = V_{\text{отн}} t_1 = V_0 \sqrt{2 - \sqrt{3}} \frac{V_0}{g} \approx 0,52 \frac{V_0^2}{g}.$$

Другой способ решения состоит в записи зависимостей координат тел от времени

$$\begin{aligned} x_1(t) &= V_0 \cos 30^\circ t, & y_1(t) &= V_0 \sin 30^\circ t - gt^2/2, \\ x_2(t) &= V_0 \cos 60^\circ t, & y_2(t) &= V_0 \sin 60^\circ t - gt^2/2 \end{aligned}$$

и вычислении расстояния между телами по формуле

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = V_0 t \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения и подставляя в последнюю формулу время $t_1 = V_0/g$, приходим к тому же результату, но в несколько ином виде

$$R_{\text{max}} = V_0 t_1 \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \frac{V_0^2}{g} \approx 0,52 \frac{V_0^2}{g}.$$

Разбалловка: Записаны зависимости координат тел от времени или найдена $V_{\text{отн}}$ – 1 балл.

Записана зависимость расстояния между телами от времени – 3 балла.

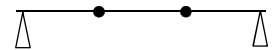
Понято, что тела упадут в одну точку – 2 балла.

Доказано, что после падения одного из тел начнется их сближение – 1 балл.

Найдено искомое время – 1 балл.

Найдено максимальное расстояние – 2 балла.

2. (10 баллов) Жесткая невесомая проволока с закрепленными на ней двумя равными точечными грузами удерживается в горизонтальном положении опорами на концах (см. рис.). Расстояние между грузами равно расстоянию от грузов до концов проволоки. Во сколько раз изменится сила, действующая со стороны одной из опор на проволоку, сразу после того, как другую опору убрать?



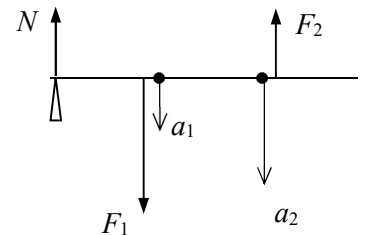
Ответ: Сила уменьшится в 5 раз.

Решение: До того, как одну из опор убрали, каждая из них действовала на проволоку с силой mg , где m – масса одного груза, а g – ускорение свободного падения.

После того, как одну из опор убрали, проволока с грузами начинает вращение вокруг своего конца, находящегося на оставшейся опоре. В первый момент скорости грузов равны нулю и, следовательно, их ускорения чисто тангенциальные. Величины тангенциальных ускорений пропорциональны расстоянию до оси вращения, поэтому $a_2 = 2a_1$ (см. рис.). Сумма моментов сил, действующих на невесомую проволоку, должна быть равна нулю, иначе проволока получит бесконечное угловое ускорение. Отсюда следует, что $F_1 = 2F_2$ и $N = F_2$, где $F_{1,2}$ – силы, действующие на проволоку со стороны грузов, а N – сила со стороны опоры (см. рис.). Запишем второй закон Ньютона для каждого груза:

$$ma_1 = mg - F_1, \quad ma_2 = mg + F_2.$$

Учитывая соотношения между ускорениями и силами, находим из этих уравнений, что



$$F_2 = mg/5.$$

Следовательно, $N = mg/5$, что в 5 раз меньше начального значения.

Разбалловка: Понято, что ускорения грузов чисто тангенциальные – 1 балл.

Записано $a_2 = 2a_1$ – 2 балла.

Понято, что $F_1 = 2F_2$ – 2 балла.

Понято, что $N = F_2$ – 2 балла.

Записан второй закон Ньютона для каждого груза – по 1 баллу за груз.

Получен ответ – 1 балл.

3. (10 баллов) В цепи, представленной на рисунке, сопротивления резисторов R равны 1 кОм, сопротивление амперметра пренебрежимо мало, напряжение на зажимах 120 В. Чему равно сопротивление R_x , если амперметр показывает 20 мА?

Ответ: Сопротивление равно 1,25 кОм.

Решение: Обозначив ток через верхний левый резистор через I , запишем для верхней ветви условие, что сумма напряжений на резисторах равна напряжению источника $U = 120$ В, т.е. $IR + (I + 20)R = U$. Отсюда находим, что $I = 50$ мА, а ток через верхний правый резистор равен 70 мА. В силу симметрии цепи в нижней ветви, составленной из резисторов R , текут такие же токи. Следовательно, через резистор R_x течет ток 40 мА. Сопоставляя токи через параллельно соединенные резисторы R и R_x , находим, что $R_x = 1,25$ кОм.

