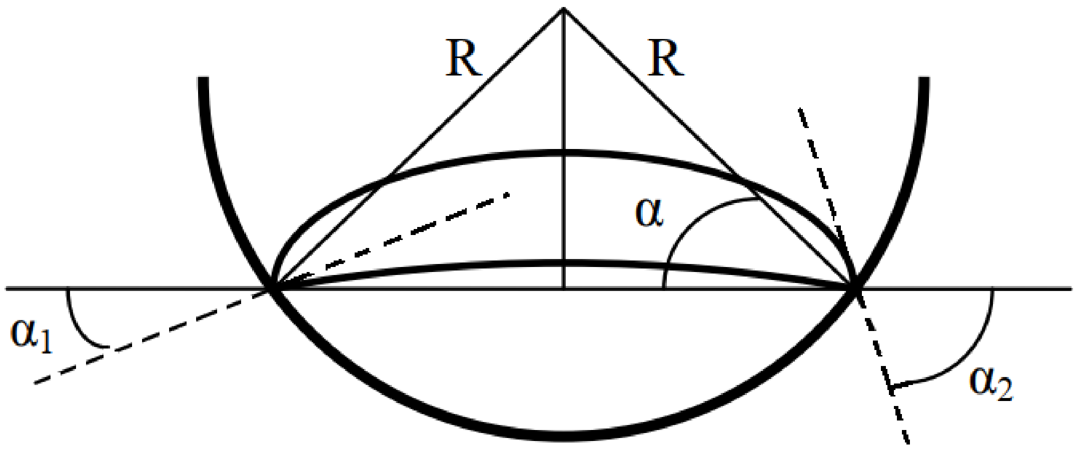
Возможные решения задач

10 класс

Задача 1. Шарик в лунке

Будем считать, что в точке удара шарика о лунку радиус лунки образует с горизонтом угол α, первый раз шарик отлетает от лунки по углом α_1 к горизонту, а второй – под углом α_2.



Дальность полета тела (расстояние между соударениями), брошенного под углом к горизонту, вычисляется по формуле:

$$l = (2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha) / g. \qquad (1)$$

Столкновение шарика со стенками лунки является упругим, поэтому начальные скорости шарика в обоих случаях одинаковы, дальности полета тоже равны ($l_1 = l_2$), поэтому:

$$\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 . \qquad (2)$$

Отсюда

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2 = 90°. \qquad (3)$$

Из-за упругости соударений и из геометрии задачи:

$$\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 = \pi/4 = 45°. \qquad (4)$$

Можем записать для радиуса лунки выражение:

$$R = l / (2 \cos 45°) = l / \sqrt{2} . \qquad (5)$$

Время полета шарика и дальность его полета могут быть так же вычислены по формулам:

$$T_1 = (2V_0 \sin\alpha_1) / g \text{ и } l = V_0 \cos\alpha_1 T_1. \qquad (6 и 7)$$

Аналогично для угла α_2:

$$T_2 = (2V_0 \sin\alpha_2) / g \text{ и } l = V_0 \cos\alpha_2 T_2 \qquad (8 \text{ и } 9)$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получим:

$$\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = \sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2.$$

Выражая $\sin\alpha_1$ и $\cos\alpha_1$ из уравнений для времени и дальности полета и проделав

$$\frac{g^2T_1^2}{4} + \frac{l^2}{T_1^2} = \frac{g^2T_2^2}{4} + \frac{l^2}{T_2^2} \Rightarrow l = \frac{g}{2}T_1T_2 \Rightarrow \boxed{R = \frac{gT_1T_2}{2\sqrt{2}}}$$

аналогичные вычисления для второго угла, получим:

Окончательный ответ (при значении ускорения свободного падения 9.8 м/с^2):

$$R = 4.9 \text{ м.}$$

Критерии оценивания решения:

Написана формула (1) для расстояния между соударениями шарика – 1 балл.

Доказано, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2 = 90°.°$ (3) – 1 балл.

Доказано, что $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 = \pi/4 = 45°$ (4) – 2 балла.

Написано выражение для радиуса лунки (5) – 1 балл.

Выписаны формулы (6 и 7) для времени полета шарика и дальности его полета при α_1 – 1 балл.

Выписаны формулы (8 и 9) для времени полета шарика и дальности его полета при α_2 – 1 балл.

Получено окончательное выражение для искомого радиуса лунки R – 2 балла.

Получен правильный числовой ответ – 1 балл.

Задача 2. Соударение шаров

Если шары начинают падать с высоты h, то они достигают земли со скоростью:

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (1)$$

Нижний шар первым ударяется о землю и затем сталкивается с верхним шаром, который получит самую большую возможную энергию, если нижний шар будет находиться в покое после двух столкновений.

Нижний шар ударяется о землю рикошетом со скоростью v и сталкивается с верхним шаром, перемещающимся вниз со скоростью - v . Уравнения выражающие законы сохранения импульса и энергии, запишем в виде:

$$(m_2 - m_1)v = m_1u_1 + m_2u_2 ., \qquad (2)$$

$$(m_1+m_2)v^2/2 = m_1u_1^2/2 + m_2u_2^2/2\,.. \qquad (3)$$

Найдём скорость верхнего шара после столкновения и отношение масс шаров:

$$u_1 = (3m_2 - m_1)v/(m_1+m_2) = (3 - m_1/m_2)v/(m_1/m_2+1). \qquad (4)$$

Скорость принимает наибольшее значение, а значит и высота отскока максимальна, при

$$m_2 >> m_1. \qquad (5)$$

Таким образом, верхний шар фактически сталкивается с движущейся со скоростью v ему навстречу бесконечно тяжелой стенкой.

В этом случае верхний шар приобретает скорость 3 v и подскакивает на высоту

$$H = 9h. \qquad (6)$$

При этом нижний шар продолжает движение вверх со скоростью v, почти не потеряв энергии.

Критерии оценивания решения:

Определена скорость шаров у земли, формула (1) – 1 балл.

Правильно записан закон сохранения импульса для тел, формула (2) – 1 балл.

Правильно записан закон сохранения механической энергии, формула (3) – 1 балл.

Найдена скорость верхнего шара после столкновения, формула (4) – 3 балла.

Найдено искомое отношение масс или записано условие (5) – 3 балла.

Найдена высота H – 1 балл.

Задача 3. Дробинка

1) Для того, чтобы дробинка начала тонуть, нет необходимости в том, чтобы растаял весь лед. Достаточно того, что средняя плотность льда с дробинкой станет равной плотности воды.

2) Если массу оставшегося при этом льда обозначить M_1, то условие того, что дробинка начнет тонуть, запишется так:

$$(M_1 + m)/V = \rho_В.. \qquad (1)$$

3) Но объем V льда и дробинки равен сумме их объемов:

$$V = (M_1 / \rho_л) + (m / \rho_{св}). \qquad (2)$$

Поэтому

$$M_1 + m = \rho_в \cdot (M_1 / \rho_л + m / \rho_{св}). \qquad (3)$$

4) Отсюда выражаем M_1:

$$M_1 = m \cdot [(\rho_{св} - \rho_в) \cdot \rho_л / (\rho_в - \rho_л) \cdot \rho_{св}] = 8.2 \cdot m. \qquad (4)$$

5) Растаять должна масса льда:

$$\Delta M = M - M_1 = M - 8.2 \cdot m = 59 \text{ г}. \qquad (5)$$

6) Для этого необходимо количество теплоты:

$$Q = \lambda \cdot \Delta M = 19.5 \text{ кДж} \qquad (6)$$

Критерии оценивания решения:

Первый пункт решения (утверждение о том, что не весь лед должен растаять) – 3 балла.

Второй пункт решения (условие того, что дробинка начнет тонуть) – 1 балл.

Третий пункт решения (общий объем нерастаявшего льда и дробинки) – 2 балла.

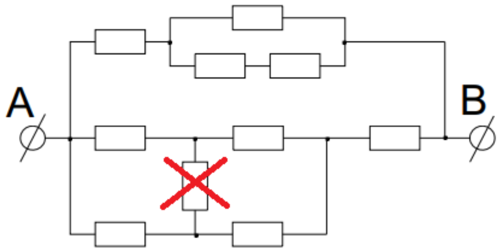
Четвертый пункт решения (найдена масса нерастаявшего льда) – 2 балла.

Пятый пункт решения (найдена масса растаявшего льда) – 1 балл.

Получен правильный ответ, определено количество теплоты – 1 балл.

Задача 4. Предохранители

1) Заметим, что в нижней части схемы есть сопротивление, которое включено между точками с одинаковым потенциалом, поэтому ток через это сопротивление всегда равен 0, и следовательно, его можно не учитывать.



2) Таким образом, эквивалентная схема содержит две параллельные цепочки с сопротивлениями

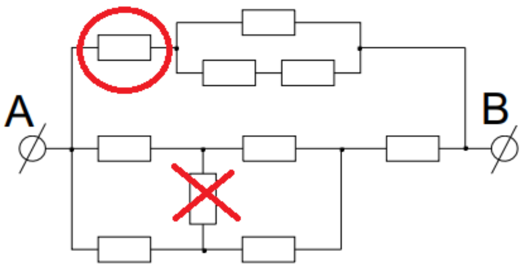
$$R_1 = R + (R*2R) / (R + 2R) = (5/3)R \qquad (1)$$

и

$$R_2 = (2R*2R) / (2R + 2R) + R = 2R \qquad (2)$$

и токами I_1 и I_2, где R – сопротивление предохранителя.

3) Точки A и B будут изолированы друг от друга при перегорании первого предохранителя в верхней части цепи. Сопротивление верхней ветви меньше, чем нижней. Поэтому через верхнюю ветвь с сопротивлением R_1 пойдет больший ток



($I_1 > I_2$).

4) Для этого ток через это сопротивление должен быть равен I_0, то есть

$$I_1 = I_0. \qquad (3)$$

5) Так как верхняя и нижняя часть соединены параллельно ($U_1 = U_2$), получим:

$$(5/3)R\,I_1 = 2R\,I_2. \quad (4)$$

6) Для токов справедливо соотношение:

$$I = I_1 + I_2. \quad (5)$$

7) Решая систему уравнений (3) – (5) получим: $I = 22$ А.

Критерии оценивания решения:

Первый пункт решения (упрощение схемы, переход к эквивалентной схеме) – 2 балла.

Определение сопротивления верхней ветви R_1 (формула (1)) – 1 балл.

Определение сопротивления нижней ветви R_2 (формула (2)) – 1 балл.

Третий пункт решения (с обоснованием) – 2 балла.

Четвертый пункт решения (формула (3)) – 1 балл.

Пятый пункт решения, одинаковость напряжений (формула (4)) – 1 балл.

Шестой пункт решения (формула (5)) – 1 балл.

Получен правильный ответ – 1 балл.

Задача 5. Струя воды

Объем воды, вытекающий за время Δt:

$$\Delta V = Sv\Delta t. \qquad (1)$$

Этот объем воды имеет импульс:

$$\Delta p = \rho\Delta V v = \rho S v^2\Delta t. \qquad (2)$$

Сила отдачи F, отклоняющая трубку в направлении, противоположном направлению истечения воды, может быть определена следующим образом:

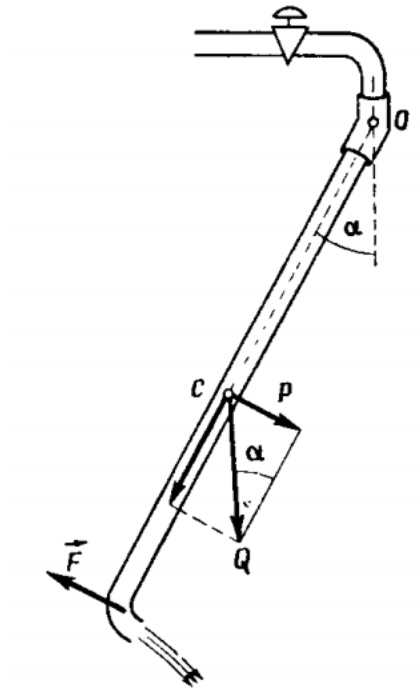
$$\Delta p = F\Delta t, \qquad (3)$$

следовательно

$$F = \rho S v^2, \qquad (4)$$

Вес трубки с водой равен:

$$Q = (M + SL\rho)g. \qquad (5)$$



Запишем условие равенства моментов сил F и Q относительно точки O в равновесии:

$$FL = Q\ \sin\alpha \cdot\ (L\ /\ 2), \qquad (6)$$

откуда

$$\sin\alpha = (2S\rho v^2)\ /\ (M + SL\rho)g, \qquad (7)$$

подставляя численные значения, имеем

$$\alpha \approx 16°.$$

Критерии оценивания решения:

Записано выражение для объема воды (1), вытекающего за время Δt, из трубки – 1 балл.

Записана формула (2) для импульса – 2 балла.

Определена сила отдачи (формулы (3) и (4)) – 2 балла.

Записана формула (5) для веса трубки с водой – 1 балл.

Сделан рисунок с указанием сил, действующих на трубку – 1 балл.

Записано условие равновесия через моменты сил (6) – 2 балла.

Найдено решение (7) и получен правильный числовой ответ – 1 балл.