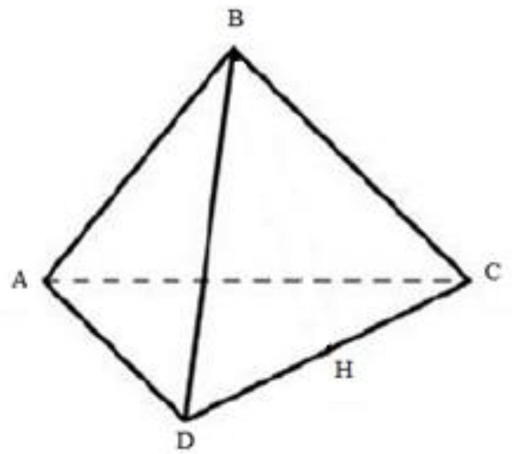
1. «Стойка ЛЭП»

Часть металлического каркаса от стойки ЛЭП решили испытать. Перед испытаниями конструкция была не заряжена. Её поместили в однородное электрическое поле напряжённостью E, направив вектор $\vec{E}$ вдоль AB. На ребре AC появился заряд q_1, на AD – заряд q_2. Затем конструкцию развернули так, что поле стало направлено по BH (BH – высота треугольника DBC). Найдите индуцированные на каждом ребре конструкции заряды в этом случае.



Возможное решение:

С высокой точностью металл можно представить в виде совокупности положительно заряженных ионов, находящихся в узлах решётки, и отрицательно заряженных свободных электронов, хаотически движущихся по всему объёму металла.

Так как в начальный момент каркас не был заряжен, то при помещении его в электрическое поле суммарный заряд останется равным нулю. Электроны всего лишь перераспределятся в металле – где-то будет избыток, а где-то недостаток электронов. При этом индуцированные заряды создают внутри металлического каркаса внутреннее поле, напряжённость которого противонаправлена напряжённости внешнего поля. Данный процесс будет происходить до тех пор, пока суммарное воздействие на каждый электрон внешней силы и силы, создаваемой внутренним полем. Таким образом, напряжённость суммарная обращается в ноль.

Рассмотрим сначала каркас в поле, параллельном AB. Для наглядности повернём картинку так, будто конструкция стоит на ребре AB. Поскольку система симметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей через DC, понятно, что заряды на рёбрах AC и BC одинаковы по модулю и равны q_1. Аналогично равны заряды рёбер AD и BD по модулю q_1. Докажем, что заряд ребра BC равен $q_{\text{BC}} = -q_1$.

Рассмотри ситуацию, когда конструкцию поместили в поле, направленное вдоль BA, то есть противоположно исходному. Понятно, что на ребре BC индуцируется заряд q_1. Теперь пусть в системе включено и исходное поле, и поле, направленное вдоль BA. Тогда заряд на BC будет равен $q_{\text{BC}} + q_1 = 0$, т.к. суммарное поле равнялось нулю (а значит и сумма зарядов должна быть равна нулю). Следовательно, $q_{\text{BC}} = -q_1$. Аналогично, заряд на BD равен $-q_2$.

При этом заряды перераспределяются только вдоль направления AB, чтобы компенсировать внешнее поле. Поэтому вдоль направления, перпендикулярного AB заряды перераспределяться не будут. Значит, заряд и AB, и DC равняется 0.

Распределение зарядов, в итоге, при направленности внешнего поля вдоль AB показано в таблице:

AB	BC	DC	DB	AD	AC
0	$-q_1$	0	$-q_2$	q_2	q_1

Поле вдоль BH напряжённостью E можно представить как суперпозицию полей вдоль BA и BC величиной $\mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{3}}$ каждое.

Так как величина индуцированного заряда прямопропорциональна величине внешнего поля, то в случае, когда включено только поле E_1 вдоль BA заряды распределены так:

AB	BC	DC	DB	AD	AC
0	$\frac{q_1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{q_2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{q_2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{q_1}{\sqrt{3}}$

Когда поле включено только вдоль BC, распределение зарядов следующее:

AB	BC	DC	DB	AD	AC
$\frac{q_1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{q_2}{\sqrt{3}}$	$\frac{q_2}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{q_1}{\sqrt{3}}$

Когда включена сумма полей, заряды на рёбрах также равны сумме зарядов:

AB	BC	DC	DB	AD	AC
$\frac{q_1}{\sqrt{3}}$	$\frac{q_1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{q_2}{\sqrt{3}}$	$2\frac{q_2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{q_2}{\sqrt{3}}$	$-2\frac{q_1}{\sqrt{3}}$

Система оценивания задачи:

Объяснено, какие заряды и почему перемещаются по конструкции – **1 балл**

Доказано, что заряды симметричных рёбер противоположны по знаку и равны по модулю – **2 балла**

Найдены заряды в самом начале на AB и DC – **2 балла**

Показано, что поле BH можно разложить на сумму двух вдоль AB и BC величиной $\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{3}}$ – **2 балла**

Найдено распределение при включении поля E_1 вдоль BA – **1 балл**

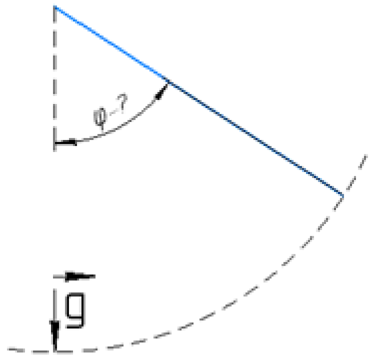
Найдено распределение при включении поля E_1 вдоль BC – **1 балл**

Найдено распределение при включении поля E вдоль BH – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Соломинка с водой»

Тонкую соломинку длиной l и радиусом r, полную жидкостью, раскручивают. При этом соломинка движется по дуге окружности так, что один из концов вращается с линейной скоростью υ относительно другого конца соломинки, который мы считаем закреплённым. При каком угле φ жидкость начнёт вытекать из соломинки? Коэффициент поверхностного натяжения жидкости считать равным σ.



Возможное решение:

Мысленно разобьем жидкость в соломинке на большое количество элементов массой Δ**m** длиной Δ**y**.

Координату **y** элемента будем отсчитывать от оси вращения вдоль (соломинки).

Давление жидкости в трубке меняется от точки к точке: $p \in p(y)$.

Рассмотрим k-й элемент считая от оси. В проекции на направление соломинки сумма сил, действующих на жидкость должна быть равна центростремительной силе:

$$\Delta m\omega^2 k\Delta y = \big[p\big((k+1)\Delta y\big) - p(k\Delta y)\big]\pi r^2 - \Delta m \cos\varphi,$$

здесь $p\big((k+1)\Delta y\big)$ и $p(k\Delta y)$ – давление справа и слева от элемента, а $\omega = \frac{v}{r}$ – угловая скорость, с которой вращается соломинка.

Напишем аналогичные равенства для каждого элемента и сложим их все. Складывая величины $k\Delta y$ для всех k получим $l/2$, так как для каждого элемента, расположенного на расстоянии x от середины соломинки существует симметричный с другой стороны, такой, что сумма их координат равна $l/2$. Складывая разности в квадратных скобках для соседних элементов, будем каждый раз сокращать вклады давления на общей границе элементов. Таким образом, получим

$$M\omega^2 l/2 = \Delta p \pi r^2 - Mg\cos\varphi,$$

здесь $M = \rho\pi r^2 l$ – масса всей жидкости в соломинке, а Δp – разность давлений в жидкости на краях соломинки.

Разность давлений на концах соломинки обеспечивается силой натяжения жидкости. Пока соломинка находится в покое, сила натяжения как раз компенсировала гидростатическое давление жидкости, так что $\Delta p = \rho g l \cos\varphi$.

Давление жидкости под искривлённой поверхностью отличается от атмосферной на величину $P = 2\sigma/R$, где R – радиус кривизны жидкости на границе: если поверхность жидкости выпуклая, давление в ней на P большое атмосферного, а если вогнутое – меньше. У нас жидкость удерживается от вытряхивания двумя менисками (искривленными поверхностями жидкости), радиус которых R не меньше r, значит $\Delta p \leq 4\sigma/r$. Подставляя это выражение в предыдущее уравнение и выражая угловую скорость через линейную, получим условие вытряхивания:

$$\cos\varphi = \frac{4\sigma}{\rho g l} - \frac{v^2 l}{2 g r^2}$$

По определению $|\cos\varphi| \leq 1$, это условие определяет интервал допустимых значений параметров задачи, при нарушении которых жидкость либо выливается из соломинки сразу, либо не выливается оттуда вовсе.

Ответ: Жидкость начнет выливаться наружу, если $\varphi = \arccos[\frac{4\sigma}{\rho g l} - \frac{v^2 l}{2 g r^2}]$ при условии, что аргумент arccos не превосходит 1.

Система оценивания задачи:

Получена разность давлений жидкости на краях соломинки – **4 балла**

Показано, что разность давлений до вращения компенсировала гидростатическое давление – **2 балла**

Получено условие вытряхивания – **3 балла**

Получено значение угла – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Необычное кипение»
От длинного металлического прута отрезали кусок длиной L = 1м, правый конец которого помещен в кипящий жидкий водород. На расстоянии l = 81см от левого конца куска лежит маленькая капля жидкого азота. Левый конец погрузили в кипящий хлор. Какая доля водорода выкипит, пока вся капля азота превратится в пар? Количество кипящего хлора очень велико. Температура кипения жидкого водорода равна -252.6 ºC, температура кипения хлора равна -34.1 ºC, температура кипения жидкого азота равна -195.8 ºC.
Принять, что энергия переходит только через прут, поток энергии через любой мелкий кусочек прута прямо пропорционален разности температур на границах этого кусочка.

Возможное решение:
Наличие небольшой массы жидкого азота существенно не влияет на распределение температуры вдоль прута. Докажем, что в установившемся режим теплопередачи температура будет равномерно меняться вдоль прута (от $t_1 = -252.6$℃ на одном конце до $t_0 = -34.1$℃ на другом).

Действительно, разобьем прут на одинаковые участки длиной ΔL. В установившемся режиме теплопередачи тепло в пруте нигде не должно накапливаться, иначе место, где теплота накапливается, будет неограниченно нагреваться. Значит поток тепла через каждый участок ΔL одинаков. Участки ничем не отличаются друг от друга, кроме температур на их границах, и значит по условию задачи, разность температур на краях произвольного участка не должна меняться от участка к участку. Это возможно, только если температура изменяется вдоль прута по линейному закону:

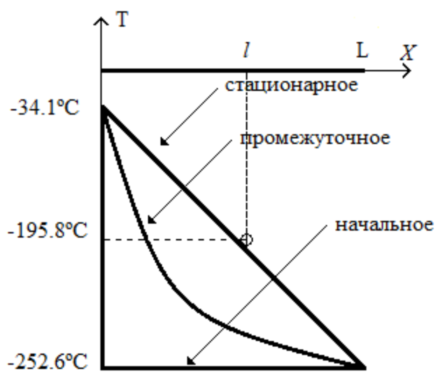
$T(x,t)=t_0-(t_0-t_1)x/L$,

здесь x – координата прута, отсчитываемая от горячего (имеющего температуру t_0=-34.1ºC) конца.

Заметьте, что там, где находится жидкий азот (при x=81см), температура прута недостаточна для кипения.

Понятно, что и до момента установления равномерного распределения жидкий азот не мог начать кипеть.

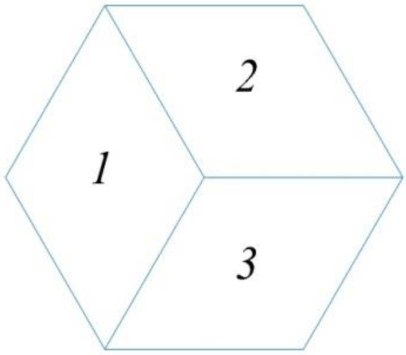
Ответ: Когда жидкий азот превратится в пар, весь водород уже выкипит.



Система оценивания задачи:
Указано, что наличие капли жидкого азота не влияет на распределение температуры – **2 балл**
Доказано, что в установившемся режиме температура будет распределена равномерно – **5 балла**
Показано, что температура в месте нахождения капли меньше температуры кипения до установления стационарного распределения температуры и после него – **2 балла**
Дан верный ответ – **1 балл**
Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. «Неидеальное деление»

Сосуд с идеальным газом хотели поделить на три части с помощью теплоизолирующих перегородок так, как показано на рисунке (вид сверху). Однако, при установке перегородок случайно в каждой перегородке образовалась маленькая дырочка. Размер дырочки мал по сравнению с длиной пробега молекул газа. Как и было запланировано, температуры в каждой части держали неизменными и равными 100 К, 200 К и 300 К в первой, второй и третьей части соответственно. Давление в первой части измеряется и равно 1 атмосфере. Определите давление во второй и третьей части сосуда.



Возможное решение:

Поскольку во всех трёх частях сосуда поддерживается постоянная температура, а столкновения молекул при прохождении дырочки отсутствует, то состояние равновесия будет определяться не равенством давлений, а равенством потоков частиц через дырочки в перегородках. Таким образазом:

$$\frac{N_1}{\Delta t} = \frac{N_2}{\Delta t} = \frac{N_3}{\Delta t} \qquad (1)$$

Количество частиц, прошедших в единицу времени через дырочку площадью S из i-ой части сосуда, можно легко рассчитать:

$\frac{N_i}{\Delta t} = \frac{1}{6} n_i v_i S$, где n_i – концентрация в i-ой части сосуда, v_i – среднеквадратичная скорость движения молекул там же. Одна шестая берётся из симметрии, так как перемешивания газа внутри части нет.

Таким образом, приходим к следующему равенству:

$$n_1 v_1 = n_2 v_2 = n_3 v_3 \qquad (2)$$

Отсюда легко получить , воспользовавшись уравнением состояния идеального газа $p = nkT$, следующее:

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}} = \frac{p_3}{\sqrt{T_3}} \qquad (3)$$

Тогда получим: $p_2 = p_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 1{,}4$ атм , $p_3 = p_1\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} = 1{,}7$ атм

Система оценивания задачи:

Показано, что равновесие в системе будет при равенстве потоков молекул (получено уравнение (1)) – **3 балла**

Выведено уравнение (2) – **3 балла**

Выведено уравнение (3) – **3 балла**

Рассчитан ответ – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

5. «Перестановка»

Две тонкие линзы расположены друг за другом так, что их главные оптические оси совпадают. Фокусное расстояние первой линзы $F_1 = -2$ см, а второй $F_2 = 1{,}5$ см. Эта система создаёт изображение спички, расположенной перпендикулярно главной оптической оси и длиной 2 см. Величина изображения $h_1 = 1$ см, а само оно получилось перевёрнутое. Какой будет величина изображения, если линзы поменять местами?

Возможное решение:

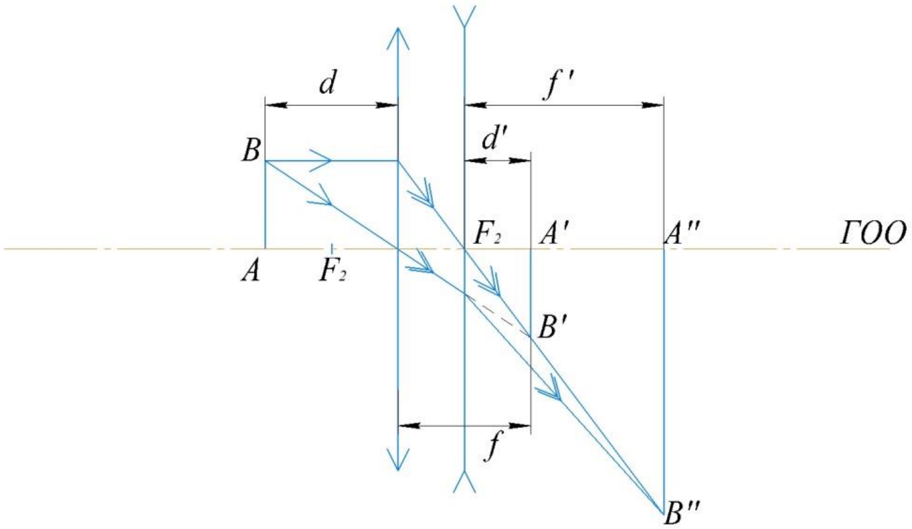
Первый вопрос, встающий при решении данной задачи – где расположена вторая линза?

Поскольку по условию изображение получилось перевёрнутым, следовательно, для второй линзы изображение действительное. Значит, предмет, который для неё, очевидно, будет мнимым, должен находится дальше фокусного расстояния (это также следует из того, что $|F_2| < |F_1|$).

При построении будет очевидно, что только одно положение подходит для того, чтобы изображение было уменьешнным в два раза по сравнению с предметом – положение, когда расстояние между первой линцой и второй равно F_2. В любом другом случае, изображение получится либо больше, либо меньше h_1.

После перестановки линз, спичка окажется на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы.

При аккуратном построении получится следующая картина:



$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, f = d' = \frac{dF_2}{d - F_2} = 3 \text{ см}$$

$$-\frac{1}{|F_1|} = -\frac{1}{d'} + \frac{1}{f'} => f' = \frac{|F_1|d'}{|F_1| - d'} = 6 \text{ см}$$

$\Gamma = \frac{f'}{d'} = \frac{h_2}{h'} = 4, h' = 2$ см, так как мнимый предмет для второй линзы по размеру равен спичке (спичка находится на двойном фокусном расстоянии от первой линзы). $h_2 = 8$ см.

Система оценивания задачи:

Найдено расстояние между линзами – **4 балла**

Написана формула тонкой линзы для первой линзы – **1 балл**

Написана формула тонкой линзы для второй линзы – **1 балл**

Найдена величина мнимого предмета для второй линзы – **1 балл**

Написана формула для увеличения линзы – **1 балл**

Найдена высота изображения после второй линзы – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов