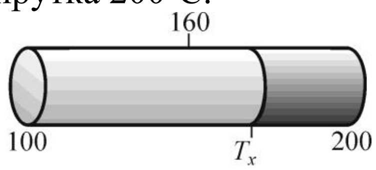
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по физике
11 класс
(время выполнения – 3 ч 50 мин, максимальное число баллов - 50)

Задача 1. (10 баллов) Длинный цилиндрический пруток составлен из двух плотно прижатых друг к другу торцами кусков равного диаметра, сделанных из разных материалов, длина одного из них в два раза больше, чем у другого. Боковая поверхность прутка теплоизолирована. Один торец прутка поддерживается при температуре +100°C, другой – при температуре +200°C. Установившаяся температура середины получившегося прутка равна при этом +160°C. Чему равна температура в месте соединения прутков? Какая была бы температура в середине прутка, если бы его части имели одинаковые длины?

Решение. В условии задачи не указано, какой именно торец находится при температуре +100°C, а какой – при +200°C, поэтому необходимо рассмотреть оба случая.

Пусть температура торца длинного прутка равна 100°C, а температура свободного конца короткого прутка 200°C.



Через любое поперечное сечение прутков в установившемся режиме проходит одинаковое количество тепла, следовательно, вдоль каждого прутка температура меняется по линейному закону (но «наклоны» будут различны). Из чертежа видно, что расстояние от торца с температурой 100°C до середины всего прутка с температурой 160°C ровно в 3 раза больше расстояния от середины до места соединения прутков - с температурой T_x. Из простой пропорции видно, что

$$T_x = 180^{\circ}\mathrm{C}.$$

Перепад температур, приходящийся на половину длинного прутка, составляет 40°C (80°C на всю длину длинного прутка), а перепад температур короткого прутка такой же длины составляет 20°C. Следовательно, при одинаковых длинах прутков перепад температур составит

$$40:20=2:1,$$

тогда для перепада температур ΔT можно записать уравнение

$$100+2\cdot\Delta T=200-\Delta T,$$

откуда

$$\Delta T = 100/3 = 33{,}3,$$

и температура в месте соединения составит

$$100+2\cdot 33{,}3=166{,}7^{\circ}\mathrm{C} \text{ (или } 200-33{,}3=166{,}7^{\circ}\mathrm{C}).$$

Аналогичный расчет для второго случая дает температуру точки соединения

$$440/3=147^{\circ}\mathrm{C},$$

и середины при равных длинах прутков

$$100+7\cdot 100/11=164^{\circ}\mathrm{C}.$$

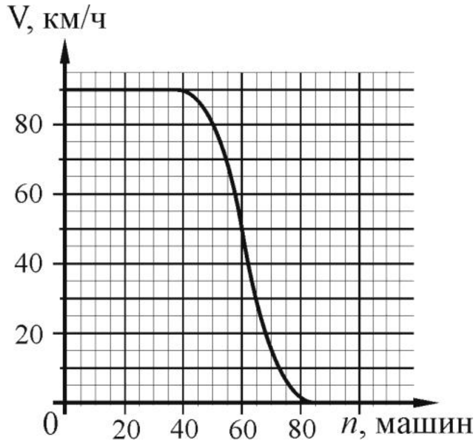
Примерные критерии оценивания:

1. Найдена температура в месте соединения прутков неравной длины – 3 балла.

2. Найдена температура в месте соединения прутков равной длины – 3 балла.

3. Рассмотрен и решен второй вариант соединения прутков – 4 балла.

Задача 2. (10 баллов) По прямому участку шоссе двигается поток автомобилей. Их скорости примерно одинаковы и не меняются. На графике представлена зависимость скорости V, на которой предпочитают ехать водители, от количества машин n, приходящихся на 100 м дороги. Какое максимальное количество автомобилей может за час проехать мимо пункта ГИБДД, расположенного на шоссе?



Решение.

Скорости машин в потоке постоянны и не меняются, следовательно, поток должен быть однородным. То есть n - число машин на $L = 100$ м пути – постоянно по всему потоку.

Сосчитаем, сколько машин проезжает мимо поста ГИБДД за время T. Рассмотрим поток машин длиной $S = VT$. Так как машины равномерно распределены вдоль дороги, то в потоке содержится

$$N = \frac{nS}{L} = \frac{nVT}{L} \text{ машин.}$$

В нашем случае T фиксировано и равно 1 часу, а параметры n и V могут меняться в соответствии с приведенным в условии графиком.

Таким образом, чтобы найти максимальное количество машин, проезжающих мимо поста ГИБДД, надо найти максимум выражения Vn. Это означает, что на графике $V(n)$, приведенном в условии, надо найти точку, в которой Vn максимально.

Видно, что этот максимум достигается при $V = 80$ км/ч и $n = 50$. Отсюда $S = 80$ км и

$$N = 50 \cdot \frac{80000}{100} = 40000 \text{ машин.}$$

Примерные критерии оценивания:

1. Определена длина потока машин – 1 балл.

2. Найдено количество машин в потоке – 2 балла.

3. Сформулировано, что необходимо найти максимум выражения Vn из графика – 2 балла.

4. Найдено условие максимума – 3 балла.

5. Найдено количество машин – 2 балла.

Задача 3. (10 баллов) Экспериментатор Глюк готовит завтрак из рисовых шариков с молоком. Плотность сухих шариков $\rho_1 = 515$ г/л. Когда шарики пропитываются молоком, их размер не меняется, а плотность сравнивается с плотностью молока $\rho_0 = 1030$ г/л. Вася налил молоко в мерный кувшин до отметки $V_1 = 0{,}3$ л и затем добавил шарики. Когда все шарики пропитались молоком, занимаемый ими объем равнялся объему не впитавшегося молока. До какой отметки V_2 поднялся уровень *молока* сразу после того, как Глюк добавил туда шарики?

Решение.

Пусть объем сухих шариков равен ΔV. Тогда их масса равна $\rho_1 \Delta V$. Так как они пропитываются молоком не сразу, то увеличение уровня молока $(V_2 - V_1)$ совпадает с объемом погрузившихся в него шариков V_n. Суммарная сила Архимеда, действующая на все шарики, компенсирует суммарную силу тяжести, поэтому

$$\rho_0 V_n g = \rho_1 \Delta V g\,.$$

Отсюда

$$\rho_1 \Delta V = (V_2 - V_1)\rho_0\,. \qquad (1)$$

Пусть по прошествии достаточного времени в шарики впиталось $\Delta V'$ молока, то есть молоко массой $\rho_0 \Delta V'$. Объем шариков при этом не изменился, а плотность стала равной ρ_0. Следовательно, их масса стала равной $\rho_0 \Delta V$. Масса пропитавшихся шариков равна сумме масс сухих шариков и впитавшегося в них молока, то есть

$$\rho_1 \Delta V + \rho_0 \Delta V' = \rho_0 \Delta V \;\Rightarrow\; \Delta V' = \Delta V\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right). \qquad (2)$$

Объем оставшегося молока равен $V_1 - \Delta V'$, и, по условию, он должен совпадать с объемом шариков ΔV: Используя формулу (2), получаем

$$V_1 - \Delta V\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = \Delta V \;\Rightarrow\; \Delta V = \frac{V_1}{2 - \rho_1/\rho_0}\,.$$

Применяя уравнение (1), находим

$$V_2 = V_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\Delta V = \frac{2V_1\rho_0}{2\rho_0 - \rho_1} = 400 \text{ миллилитров.}$$

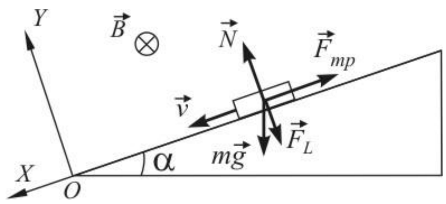
Примерные критерии оценивания:

1. Записано условие равновесия при добавлении шариков в молоко – 1 балл.
2. Найден объем молока, впитавшегося в шарики – 3 балла.
3. Найден объем оставшегося молока – 3 балла.
4. Найден уровень молока - 3 балла.

Задача 4. (10 баллов) Небольшой брусок массой m, несущий положительный заряд q, удерживают на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонталью. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Брусок отпускают без начальной скорости. Чему равна максимальная скорость бруска $v_{\max}$, если коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью μ? Ускорение свободного падения g.

Решение.

Брусок движется под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{N}$ - нормальная составляющая силы реакции поверхности, $\vec{F}_{тр}$ - сила трения, $\vec{F}_L$ - сила Лоренца. При этом



$$F_{тр} = \mu N\,,\ F_L = qvB\,,$$

где v - скорость бруска. Записывая уравнение движения в проекциях на направление наклонной плоскости и на перпендикулярное ей направление, имеем:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu N\,,\ N = mg\cos\alpha + qvB\,.$$

С увеличение скорости бруска сила трения возрастает, что приводит к уменьшению ускорения. При достижении максимальной скорости ускорение бруска обращается в нуль. Полагая $a = 0$, получаем ответ:

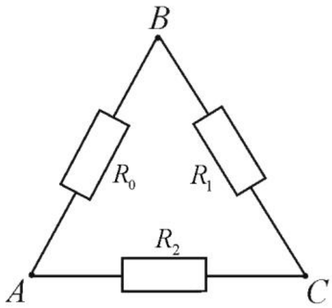
$$v_{\max} = \frac{mg}{\mu qB}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

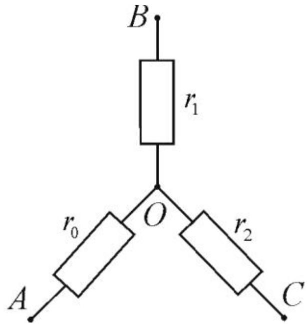
1. Выполнен рисунок и изображены силы, действующие на брусок – 3 балла.
2. Записаны уравнения проекций сил – 2 балла.
3. Отмечено, что максимальная скорость достигается при $a = 0$ – 2 балла.
4. Получен ответ – 3 балла.

Задача 5. (10 баллов) У «черного ящика» есть три клеммы. Если на клеммы *A* и *B* подают напряжение 20 В, то с клемм *B* и *C* снимают напряжение 8 В. Если на клеммы *B* и *C* подают напряжение 20 В, то с клемм *A* и *C* снимают напряжение 15 В. Изобразите схему «черного ящика», считая, что внутри него находятся только резисторы и определите отношение между величинами сопротивлений для каждой схемы.

Решение.

Ясно, что между каждой парой клемм «черного ящика» должны быть включены резисторы – в противном случае невозможно будет снимать ненулевое напряжение либо с клемм *BC*, либо с клемм *AC*. Простейшие схемы подключения этих резисторов («треугольник» и «звезда») показаны на рис.





Вначале рассмотрим первую схему и найдем, чему должны быть равны сопротивления R_0, R_1 и R_2. Обозначим подаваемое на клеммы напряжение через $V = 20$ В, а снимаемое с соответствующих пар клемм напряжение через $U_{BC} = 8$ В и $U_{AC} = 15$ В. Тогда можно записать:

$$U_{BC} = \frac{VR_1}{R_1 + R_2}, \qquad U_{AC} = \frac{VR_2}{R_0 + R_2}.$$

Отсюда

$$R_2 = \frac{U_{AC}}{V - U_{AC}} R_0 = 3R_0, \quad R_1 = \frac{U_{BC}}{V - U_{BC}} R_2 = 2R_0.$$

Теперь найдем, чему должны быть равны быть сопротивления r_0, r_1 и r_2 во второй схеме, используя те же обозначения для напряжений, что и в первом случае. Поскольку во второй схеме при подаче напряжения V на клеммы AB ток не течет через резистор r_2 и напряжение на нем не падает. А при подаче напряжения V на клеммы BC ток не течет через резистор r_0 и на нем также отсутствует падение напряжения, то

$$U_{BC} = U_{OB} = \frac{Vr_1}{r_0 + r_1}, \qquad U_{AC} = U_{OC} = \frac{Vr_2}{r_1 + r_2}.$$

Отсюда

$$r_1 = \frac{U_{BC}}{V - U_{BC}} r_0 = \frac{2}{3} r_0, \qquad r_2 = \frac{U_{AC}}{V - U_{AC}} r_1 = 3r_1 = 2r_0$$

Таким образом, «черный ящик» в простейших случаях должен состоять из трех резисторов с сопротивлениями R_0, $R_1 = 2R_0$ и $R_2 = 3R_0$, соединенных «треугольником» - так, как показано на рис, или из трех резисторов с сопротивлением r_0, $r_1 = \frac{2}{3} r_0$ и $r_2 = 2r_0$, соединенных «звездой», как показано на рис. Величины сопротивлений R_0 и r_0 могут быть любыми, отличными от нуля.

1. Найдены и нарисованы возможные схемы подключения – по 2 балла.
2. Найдено, что для «треугольника» R_0, $R_1 = 2R_0$ и $R_2 = 3R_0$ – 3 балла.
3. Найдено, что для «звезды» r_0, $r_1 = \frac{2}{3} r_0$ и $r_2 = 2r_0$ – 3 балла.