

11 Класс.

Задача № 1. Катапульта

На горизонтальной площадке имеется круглое отверстие, под которым стоит катапульта способная пускать шарики вертикально вверх с постоянной скоростью $V_0 = 10$ м/с. В начальный момент катапульта выбросила первый шарик. В тот момент, когда шарик был на максимальной высоте, катапульта запустила второй такой же шарик, в момент, когда первый и второй шарики столкнулись, катапульта запустила третий шарик. Какое время в воздухе находились первый и третий шарики? Все соударения происходят вдоль одной прямой и абсолютно упругие.

Возможное решение

1. Рассмотрим соударения двух шариков при движении навстречу друг к другу. Т.к. соударения абсолютно упругие, то выполняются законы сохранения импульса и энергии.
2. Соударения происходят вдоль прямой, для нахождения скоростей шариков (U_1 и U_2) после соударения, запишем закон сохранения импульса в проекции на прямую:

$$mV_1 - mV_2 = -mU_1 + mU_2 \quad \text{или} \quad V_1 - V_2 = U_2 - U_1 \quad (1)$$

$$\text{Закон сохранения энергии: } \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} = \frac{mU_1^2}{2} + \frac{mU_2^2}{2} \quad \text{или} \quad V_1^2 + V_2^2 = U_1^2 + U_2^2 \quad (2)$$

3. Для решения полученной системы

$$\text{перепишем (1) и (2) так} \quad \begin{cases} V_1^2 - U_1^2 = U_2^2 - V_2^2 \\ V_1 + U_1 = U_2 + V_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} V_1 - U_1 = U_2 - V_2 \\ V_1 + U_1 = U_2 + V_2 \end{cases} \quad \text{из этой системы}$$

находим, что $U_1 = V_2$, а $U_2 = V_1$.

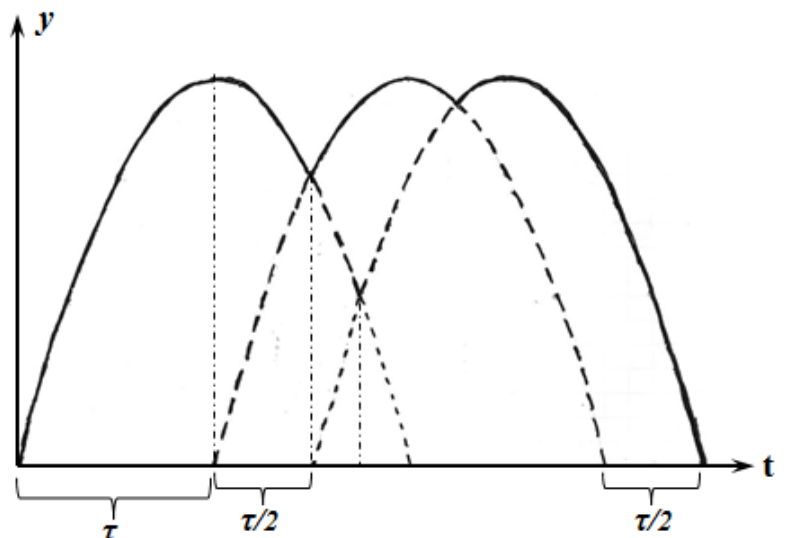
4. Из этого результата делаем вывод, что шарики обменялись скоростями, т.е. первый шарик движется по траектории второго, а второй шарик по траектории первого. Учитывая полученный результат, далее решим задачу графически (см. рис.).
5. На графике показана зависимость $y(t)$ для всего процесса

Движение первого шарика изображено сплошной линией,

второго шарика – пунктирной линией

третьего шарика – точечной линией

Из этого графика видно, что время полёта первого шарика равно $t_1 = 7,5 \tau$, время полёта третьего шарика равно $t_3 = \tau$.



6. Где τ – время, за которое первый шарик добрался до высшей точки своей траектории, т.е. $\tau = \frac{V_0}{g} = \frac{10}{10} = 1$ с. Следовательно, $t_1 = 7,5$ с $t_3 = 1$ с.

Критерии оценивания

- За 1-й пункт – 1 балл
За 2-й пункт – 3 балла

За 3-й пункт – 2 балла

За 4-й пункт – 1 балл

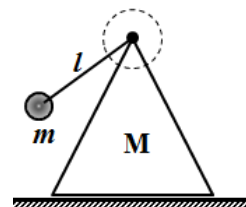
За 5-ый пункт – 2 балла

За 6-ой пункт – 1 балл

Если задача не решена, но есть мысли, направленные на решение, то можно поставить «утешительные» до 2 баллов.

Задача № 2. Колеблющаяся призма

Равнобедренная призма массой $M = 2$ кг находится на гладкой горизонтальной поверхности. На вершине призмы закреплена невесомая горизонтальная ось, вокруг которой вращается невесомый стержень длины $l = 22$ см. На конце стержня закреплён маленький шарик массой $m = 200$ г. Вначале систем покоилась, а затем стержень привели во вращение. Какова амплитуда колебаний призмы на горизонтальной поверхности?



Возможное решение

1. Т.к. система вначале покоилась, то при вращении стержня система (её центр тяжести) должна оставаться в покое вследствие, выполнения закона сохранения импульса.
2. Амплитуда колебаний в этом случае равна разности между положениями центра тяжести системы при изменении взаимного расположения призмы и шарика.
3. Для расчёта положим что в начальный момент координата центра масс равна 0, тогда максимальное смещение призмы будет в момент когда шарик будет дальше иметь максимальную координату x . Очевидно, что эта координата шарика равна l .
4. В этом случае $x_{ц.т.} = \frac{l \cdot m}{m + M} = 2$ см.
5. Тогда амплитуда колебаний $A = x_{ц.т.} = 2$ см.

Критерии оценивания

За 1-й пункт – 2 балл

За 2-й пункт – 2 балла

За 3-й пункт – 2 балла

За 4-й пункт – 3 балла

За 5-й пункт – 1 балл

В 3-ем пункте задачи, все числа должны быть проставлены, если это не так, то снимается 1 балл

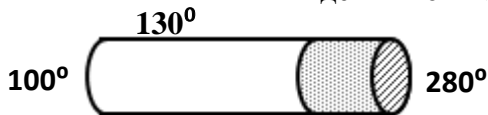
Если задача не решена, но есть мысли, направленные на решение, то можно поставить «утешительные» до 2 баллов.

Задача № 3. Два цилиндра

Длинный цилиндр составлен из двух плотно прижатых друг к другу торцами цилиндров равного диаметра сделанных из разных однородных материалов; длина одного из них втрое больше, чем другого, Боковая поверхность прутка теплоизолирована. Свободный торец длинного цилиндра поддерживают при температуре $+100^{\circ}\text{C}$, другой свободный торец – при температуре $+270^{\circ}\text{C}$. Установившаяся температура на одной трети всей длины цилиндра от свободного торца равна при этом $+120^{\circ}\text{C}$. Чему равна температура в месте соединения цилиндров? Какая была бы температура в середине прутка?

Возможное решение

1. В условии задачи не указано, от какого именно конца находится срез при температуре 120°C , поэтому придется рассмотреть оба случая.
2. Рассмотрим случай когда $T = 120^{\circ}\text{C}$ приходится на одну треть всей длины, отсчитанной от конца длинного цилиндра. Температура свободного торца длинного куска равна 100°C , а температура свободного торца короткого куска 280°C . Через любое поперечное сечение прутков в установившемся режиме проходит одинаковое количество теплоты, следовательно, вдоль каждого куска температура меняется по линейному закону. Температура вдоль длинного цилиндра T_x в этом случае находится по формуле $T_x = T_1 + \gamma \cdot x$, где $\gamma = \frac{\Delta T}{3l} = \frac{T_K - T_1}{3l}$ или окончательно $T_x = T_1 + \frac{T_K - T_1}{3l} \cdot x$ (1)
где $0 < x < 3l$, T_K – температура прутка в месте соединения



Пусть $T_1 = 100^{\circ}$, $T_2 = 280^{\circ}$; $T_3 = 120^{\circ}$, тогда из (1) определяем T_K , подставив $x = \frac{4}{3}l$

$$T_K = \frac{9T_3 - 5T_1}{4} = \frac{1080^{\circ}\text{C} - 500^{\circ}\text{C}}{4} = 145^{\circ}\text{C} \quad \blacksquare$$

3. Температура середины прутка T_C по формуле (1) $T_C = T_1 + \frac{T_K - T_1}{3l} \cdot 2l = 130^{\circ}\text{C}$ ■
4. Рассмотрим случай когда $T = 120^{\circ}\text{C}$ приходится на одну треть всей длины, отсчитанной от конца короткого цилиндра. Этот срез также принадлежит длинному цилиндру. Температура свободного торца длинного цилиндра равна 100°C . Задача аналогична первой только коэффициент пропорциональности будет другим – β . $\beta = \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_3 - T_1}{(8/3)l} = \frac{130 - 100}{(8/3)l} = \frac{90}{8l}$ ■
 - Температура в месте соединения цилиндров $T_K = T_1 + \beta \cdot 3l = 100^{\circ}\text{C} + \frac{90}{8l} \cdot 3l = 133,75^{\circ}\text{C}$. ■
 - Температура середины прутка $T_C = T_1 + \beta \cdot 2l = 100^{\circ}\text{C} + \frac{90}{8l} \cdot 2l = 122,5^{\circ}\text{C}$. ■

Критерии оценивания

- За 1-й пункт – 2 балла
- За 2-й пункт – 3 балла
- За 3-й пункт – 2 балла
- За 4-й пункт – 3 балла

В расчётной части задачи, все числа должны быть проставлены, если это не так, то снимается 1 балл в каждом таком пункте

Если задача не решена, но есть мысли, направленные на решение, то можно поставить «утешительные» до 2 баллов.

Задача № 4 Разделённый цилиндр

В вертикальном закрытом с обоих торцов цилиндрическом сосуде находится тонкий, невесомый и непроницаемый поршень, который делит сосуд объёмом $V_0 = 100$ л на две части. В нижней части содержится 74 г воды, в верхней части такая же масса углекислого газа. При этом в сосуде поддерживается постоянная температура равная 373 К. Какое давление установится в этом сосуде? Какие объёмы при этом будут занимать углекислый газ и вода? Какая масса воды находится в газообразном состоянии?

Справка. Молярные массы: воды $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18$ г/моль; углекислого газа $M_{\text{CO}_2} = 44$ г/моль.

Возможное решение

1. В нижней части сосуда будет находиться смесь воды и насыщенного водяного пара. Давление насыщенного пара при температуре 100°C – $p = 10^5$ Па.
2. Минимальное давление углекислого газа в объёме 100 л при температуре 373 К определим из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$p_{\text{CO}_2}^{\text{мин}} = \frac{m}{M_{\text{CO}_2}} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{74}{44} \cdot \frac{8,31 \cdot 373}{0,1} \approx 5,2 \cdot 10^4 \text{ Па.} \quad \text{Это меньше давления водяных паров.}$$

Следовательно, давление, которое установится в цилиндре, будет равно давлению насыщенного пара.

3. Углекислый газ при давлении насыщенного пара будет занимать объём $V = \frac{m}{M_{\text{CO}_2}} \cdot \frac{RT}{p} = \frac{74}{44} \cdot \frac{8,31 \cdot 373}{10^5} \approx 0,052 \text{ м}^3 = 52 \text{ л}$
4. Насыщенный водяной пар объём $V' = V_0 - V = 100 - 52 = 48$ (л).
5. Массу насыщенного пара определим так же из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$m = M_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \frac{p \cdot V'}{RT} = 18 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^5 \cdot 48}{8,31 \cdot 373} \approx 27,9 \cdot 10^{-3} \text{ (кг)} = 27,9 \text{ г.}$$

Ответ: 1) $p = 10^5$ Па ; 2) $V = 52$ л и $V' = 48$ л ; 3) $m = 27,9$ г.

Критерии оценивания

- За 1-й пункт – 1 балл
- За 2-й пункт – 3 балла
- За 3-й пункт – 3 балла
- За 4-й пункт – 1 балл
- За 5-й пункт – 2 балла

В расчётной части задачи, все числа должны быть проставлены, если это не так, то снимается 1 балл в каждом таком пункте

Если задача не решена, но есть мысли, направленные на решение, то можно поставить «утешительные» до 2-х баллов.

Задача № 5 Позитроний

Позитрон – это частица с массой равной массе электрона и положительным зарядом равным по модулю заряду электрона. (второе название позитрона – антиэлектрон). Если электрон и позитрон находятся вблизи друг друга, то под действием сил притяжения они начнут двигаться навстречу друг другу и при нецентральной соударении образуют устойчивую систему.

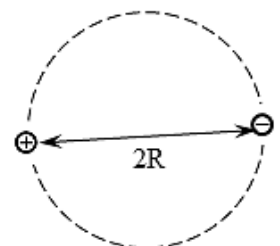
Электрон и позитрон движутся по окружности вокруг неподвижного центра масс, образуя атом позитрония. Найдите отношение потенциальной энергии к кинетической энергии этой системы.

Возможное решение

Обе частицы движутся по одной окружности на расстоянии диаметра (см рис.).

1. Кинетическая энергия системы из двух частиц $K = 2 \cdot \frac{1}{2} mV^2 = mV^2$
2. Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия двух заряженных противоположными знаками частиц

$$U = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2R)} .$$



3. Заряды удерживаются на орбите силой кулоновского взаимодействия, по второму закону

Ньютона $\frac{m \cdot V^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2R)^2}$.

Из него найдём, что кинетическая энергия системы $mV^2 = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 R}$

4. $\left| \frac{U}{K} \right| = \left(\frac{\left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} \right)}{\left(\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 R} \right)} \right) = 2$

Критерии оценивания

За 1-й пункт – 3 балла

За 2-й пункт – 3 балла

За 3-й пункт – 3 балла

За 4-й пункт – 1 балл

Если задача не решена, но есть мысли, направленные на решение, то можно поставить «утешительные» до 2-х баллов.