Решения задач муниципального этапа
олимпиады по астрономии
среди 10 классов

1. Какова продолжительность года на Марсе, если считать, что планеты движутся по круговой орбите и среднее расстояние от Марса до Солнца на 52.4% больше соответствующего расстояния от Земли до Солнца; масса Солнца – $M_C = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг; средний радиус орбиты Земли – $r_1 = 149.5 \cdot 10^6$ км?

Решение: Будем считать, что Марс вращается вокруг Солнца не по эллипсу, как в действительности, а по окружности с центростремительным ускорением:

$$a_{ц} = \frac{\upsilon^2}{r_2} = \frac{\left(2\pi r_2 / T\right)^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2}, \quad \textbf{(2 балла)} \qquad (1)$$

где T – длительность марсианского года, $r_2 = 1.524 r_1 \approx 227.8 \cdot 10^6$ км (**2 балла**). Из второго закона Ньютона следует, что:

$$ma_{ц} = G\frac{mM_C}{r_2^2} \Rightarrow a_{ц} = G\frac{M_C}{r_2^2}, \quad \textbf{(2 балла)} \qquad (2)$$

где G – гравитационная постоянная. Решая совместно уравнения (1) и (2), получим период обращения Марса вокруг Солнца:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{GM_C}} = 6.28\sqrt{\frac{\left(227.8 \cdot 10^9\right)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}} \approx 5.93 \cdot 10^7 \text{ сек} \approx 1.888 \text{ земного года}$$

(**2 балла**).

2. Примерно в 1100 г. до н.э. китайские астрономы измеряли максимальную высоту Солнца в дни летнего и зимнего солнцестояний. При этом получили соответственно 79°07' и 31°19'. Оба раза Солнце было к югу от зенита. Найдите широту местности, где проводились измерения, и угол наклона эклиптики к небесному экватору в ту эпоху.

Решение: высота Солнца в верхней кульминации в день летнего солнцестояния на широтах севернее тропика Рака (где кульминация происходит на юге), равна

$$h_1 = 90° - \varphi + \varepsilon, \qquad \textbf{(3 балла)}$$

где φ – широта места наблюдения, ε – угол наклона экватора к эклиптике. В день зимнего солнцестояния высота солнца в верхней кульминации на этих широтах равна

$$h_2 = 90° – \varphi – \varepsilon. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Решая совместно систему двух уравнений, находим широту и наклон эклиптики к экватору:

$$\varphi = 90° – (h_1 + h_2)/2 = 34°47' \qquad \textbf{(1 балл)}$$

$$\varepsilon = (h_1 – h_2)/2 = 23°54' \qquad \textbf{(1 балл)}$$

3. Считается, что возраст Вселенной около 15 млрд. лет. Чему равен возраст Вселенной в галактических годах, если Солнце обращается вокруг центра Галактики по орбите радиусом R = 26000 световых лет со скоростью 250 км/сек. Достигла ли Вселенная своего «галактического совершеннолетия»? (5 баллов)

Решение: сначала вычислим продолжительность галактического года. Для этого сначала найдём длину солнечной орбиты:

$$L = 2\pi R = 163000 \text{ св. лет} = 1{,}5\cdot 10^{18} \text{ км} \quad \text{(1 балл)}$$

Галактический год равен отношению этой длины к орбитальной скорости Солнца, т.е. $6\cdot 10^{15}$ секунд или 190 миллионов лет (2 балла). За время жизни Вселенной Солнце сделало бы около 80 оборотов вокруг центра Галактики (1 балл), то есть вселенная уже успела «состариться» (по человеческим меркам) (1 балл).

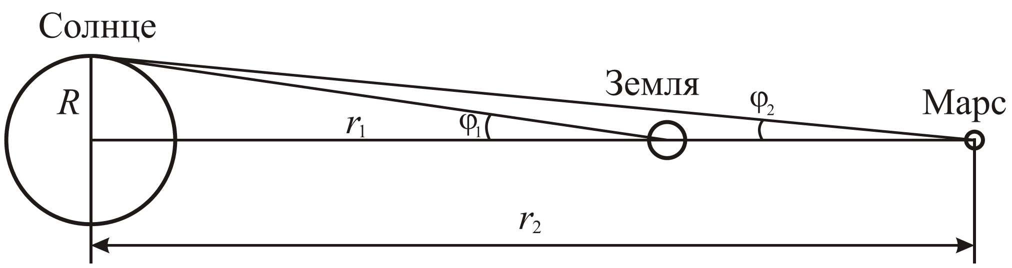
4. Во сколько раз диаметр видимого диска Солнца на поверхности Марса должно быть меньше соответствующего диаметра на Земле?

Решение: видимый диаметр Солнца прямо пропорционален углу φ, то есть отношение диаметра D солнечного диска на Земле к видимому диаметру d Солнца на поверхности Марса равно:

$$\frac{D}{d} = \frac{2\varphi_1}{2\varphi_2} \approx \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{R}{r_1} \cdot \frac{r_2}{R} = \frac{r_2}{r_1},$$

где $r_1 = 149.5 \cdot 10^6$ км – средний радиус орбиты Земли, $r_2 = 227.8 \cdot 10^6$ км – средний радиус орбиты Марса. Размерами планет можно пренебречь, также учли, что угол φ ничтожно мал. Получим:

$$\frac{D}{d} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{227.8 \cdot 10^6}{149.5 \cdot 10^6} \approx 1.52.$$



5. Согласно одной из гипотез, в будущем Солнце в стадии красного гиганта «раздуется» так, что поглотит Землю. Чему будет тогда равна средняя плотность «нового Солнца»? Масса Солнца сейчас $M = 2{\cdot}10^{30}$ кг. Потерей массы в будущем пренебречь.

Решение: отношение плотностей равно

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(M/V_1)}{(M/V_0)} = \frac{(3M/4\pi r_1^3)}{(3M/4\pi r_0^3)} = \frac{r_1^3}{r_0^3} \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Здесь V_1 и V_0 – новый и старый объёмы Солнца, r_1 и r_0 – новый и старый радиусы Солнца. При «раздувании» Солнце увеличит свой радиус почти в 215 раз (**1 балл**). При этом его плотность уменьшится почти в 10 млн. раз (точнее в 9938375 раз, но здесь важен лишь порядок величины) (**2 балл**). Средняя плотность Солнца составляет сейчас около 1,4 г/см3 (**1 балл**) Уменьшение плотности при «раздувании» солнца доведёт эту величину до 0,14 г/м3 (**2 балла**).

6. Сколько времени нужно лететь от Земли до Марса в межпланетном корабле, движущемся по эллиптической орбите, перигелийное расстояние q которой равно расстоянию от Земли до Солнца, а афелийное расстояние Q равно расстоянию от Марса до Солнца?

Решение: из характеристик эллиптической орбиты следует, что её большая полуось $a = (Q + q)/2$ (**2 балла**). Запишем третий закон Кеплера для Земной орбиты и орбиты космического корабля

$$(T_3 / T)^2 = (a_3 / a)^3 \qquad \textbf{(2 балла)}.$$

Поскольку время полёта равно половине периода движения по эллиптической орбите (**2 балла**), получаем $t = ½\ ((Q + q)/2)^{3/2} \approx 0.7$ года (**2 балла**).