10 класс

Задача № 1.

Скопление галактик содержит $\mathbf{625}$ карликовых галактик, видимая звездная величина каждой из которых $\boldsymbol{m = 29^m}$ и одну гигантскую галактику. Известно, что все небольшие галактики светят как одна гигантская. Вычислите видимую звёздную величину гигантской галактики и её абсолютную звездную величину, если расстояние до скопления $\mathbf{500}$ мегапарсек.

Решение.

Световой поток от гигантской галактики в $\mathbf{625}$ раз больше, чем от одной карликовой галактики. Представим это число в виде

$$\mathbf{625 = 6,25 \cdot 100}$$

Разница в световых потоках в $\mathbf{2,5}$ раза примерно соответствует $\mathbf{1^m}$, разница в световых потоках в $\mathbf{2,5 \cdot 2,5 = 6,25}$ раз примерно соответствует $\mathbf{2^m}$ разница в световых потоках в $\mathbf{100}$ раз примерно соответствует $\mathbf{5^m}$. Значит гигантская галактика примерно на $\mathbf{2 + 5 = 7}$ звёздных величин ярче одной карликовой. Тогда видимая звёздная величина гигантской галактики около

$$\mathbf{29^m - 7^m = 22^m}$$

Близкий ответ можно получить, используя формулу Пòгсона

$$\boldsymbol{m_1 - m_2 = -2,5 \cdot lg\frac{I_1}{I_2}}$$

Где $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$ – звёздные величины объектов, а $\boldsymbol{I_1}$ и $\boldsymbol{I_2}$ – световые потоки от них. Пусть индекс $\mathbf{1}$ относится к гигантской галактике, а индекс $\mathbf{2}$ к карликовой галактике, тогда

$$\boldsymbol{m_1 - 29^m = -2,5 \cdot lg\frac{625}{1}}$$

Откуда

$$\boldsymbol{m_1 = 29^m - 7,5^m \approx 21,5^m}$$

Запишем формулу связи между абсолютной и видимой звёздными величинами

$$\boldsymbol{M = m + 5 - 5 \cdot \lg r}[\text{пк}]$$

Подставляя численные данные, получим

$$\boldsymbol{M = 21,5^m + 5 - 5 \cdot \lg(5 \cdot 10^8) = -17^m}$$

Ответ: $\boldsymbol{19^m; -17^m}$

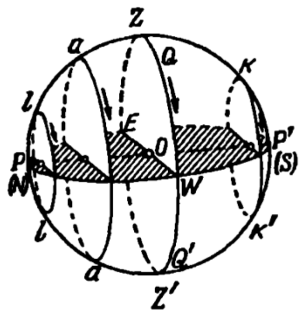
Задача № 2.

Астрономические сумерки — это промежуток времени, за который центр диска Солнца опускается под горизонт на $\mathbf{18°}$. Где и во сколько раз в день весеннего равноденствия астрономические сумерки будут длиннее на северном тропике или на экваторе? При решении считайте Солнце точечным объектом.

Решение.

В день весеннего равноденствия (как и осеннего) Солнце расположено на небесном экваторе, поэтому его суточный путь по небесной сфере совпадает с небесным экватором. Суточное движение Солнца по небесному экватору будем считать равномерным. Пусть угловая скорость суточного движения Солнца равна $\boldsymbol{\omega}$.

На земном экваторе плоскость небесного экватора расположена под углом $\mathbf{90°}$ к горизонту (смотри рисунок ниже).

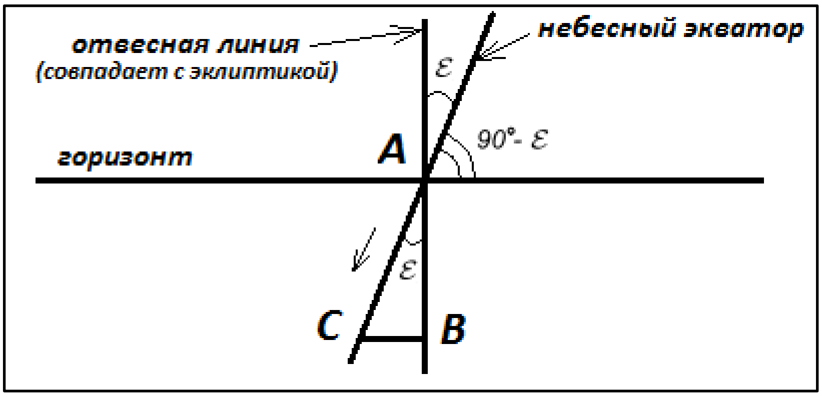


Суточное движение светил для наблюдателя на земном экваторе

Значит, в день весеннего равноденствия на земном экваторе Солнце будет заходить вертикально. Тогда для того, чтобы опуститься под горизонт на угол $\boldsymbol{h}$ ему понадобится время

$$\boldsymbol{t}_{\text{экв}} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{\omega}}$$

На северном тропике небесный экватор будет наклонён к горизонту на угол $\mathbf{90° - \boldsymbol{\varphi}}$ (где $\boldsymbol{\varphi}$ – географическая широта места наблюдения). Для северного тропика $\boldsymbol{\varphi = \varepsilon}$ (где $\boldsymbol{\varepsilon = 23°\,26'21.45'' \approx 23,5°}$ - угол наклона небесного экватора к эклиптике, из перечня справочных данных). То есть Солнце в момент захода будет двигаться не вертикально, а под углом к горизонту. Тогда для того, чтобы опуститься под горизонт на угол $\boldsymbol{h}$ (катет $\boldsymbol{AB}$), ему понадобится пройти бо̀льший путь, а именно гипотенузу $\boldsymbol{AC}$ прямоугольного треугольника $\boldsymbol{ABC}$ (смотри рисунок ниже).



Этот путь равен

$$AC = \frac{AB}{\cos \varepsilon} = \frac{h}{\cos \varepsilon}$$

И по нему Солнце движется с угловой скоростью ω и проходит его за время $t_{\text{сев.троп}}$, значит этот же путь равен

$$AC = \omega \cdot t_{\text{сев.троп}}$$

Приравнивая выражения для AC и выражая $t_{\text{сев.троп}}$, получаем

$$t_{\text{сев.троп}} = \frac{h}{\omega \cdot \cos \varepsilon}$$

Тогда

$$\frac{t_{\text{сев.троп}}}{t_{\text{экв}}} = \frac{1}{\cos \varepsilon} \approx \frac{1}{\cos 23,5^\circ} \approx 1,1$$

Ответ: астрономические сумерки длиннее на северном тропике примерно в $1,1$ раза.

Задача № 3.

Промежуток времени между последовательными максимальными сближениями объекта Солнечной системы с Венерой равен 5 лет. Вычислите возможный период обращения этого объекта вокруг Солнца. Считайте, что орбиты Венеры и объекта лежат в одной плоскости.

Решение.

Уравнение синодического движения

$$\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right|$$

где S – синодический период движения тела 2 относительно тела 1 (или наоборот), T_1 и T_2 – сидерические периоды движения соответственно тел 1 и 2 вокруг Солнца.

Пусть телом 1 будет Венера, а телом 2 объект, упомянутый в условии. Тогда, если выражать все периоды в годах, получаем

$$\mathbf{\frac{1}{5} = \left|\frac{1}{0,62} - \frac{1}{T_2}\right|}$$

где $\mathbf{0,62}$ – сидерический период обращения Венеры вокруг Солнца в земных годах (данные взяты из перечня справочных данных и пересчитаны в годы). Тогда

$$\mathbf{\left|\frac{T_2 - 0,62}{0,62 \cdot T_2}\right| = \frac{1}{5}}$$

$$\mathbf{\frac{|T_2 - 0,62|}{|0,62 \cdot T_2|} = \frac{1}{5}}$$

Так как $\mathbf{T_2 > 0}$, то $\mathbf{|T_2| = T_2}$, тогда

$$\mathbf{5 \cdot |T_2 - 0,62| = 0,62 \cdot T_2}$$

Решение этого уравнения зависит от знака выражения внутри модуля.

1) Пусть $\mathbf{T_2 - 0,62 > 0}$, (то есть $\mathbf{T_2 > 0,62}$ и тело $\mathbf{2}$ внешнее по отношению к Венере), тогда $\mathbf{|T_2 - 0,62| = T_2 - 0,62}$ и мы получаем

$$\mathbf{5 \cdot (T_2 - 0,62) = 0,62 \cdot T_2}$$

$$\mathbf{T_2 = \frac{3,31}{4,38}}\text{ года} \approx \mathbf{0,76}\text{ года}$$

2) Теперь пусть $\mathbf{T_2 - 0,62 < 0}$ (то есть $\mathbf{T_2 < 0,62}$ и тело $\mathbf{2}$ внутреннее по отношению к Венере), тогда $\mathbf{|T_2 - 0,62| = -(T_2 - 0,62)}$ и мы получаем

$$\mathbf{-5 \cdot (T_2 - 0,62) = 0,62 \cdot T_2}$$

$$\mathbf{T_2 = \frac{3,31}{5,62}}\text{ года} \approx \mathbf{0,59}\text{ года}$$

Использованное нами уравнение синодического движения выводится из следующих соображений. Тело $\mathbf{1}$, обращаясь вокруг Солнца, движется с угловой скоростью $\mathbf{\frac{360°}{T_1}}$, а тело $\mathbf{2}$ – с угловой скоростью $\mathbf{\frac{360°}{T_2}}$. Тогда тело $\mathbf{2}$ относительно тела $\mathbf{1}$ (или наоборот) движется с угловой скоростью $\mathbf{\frac{360°}{S}}$, которая равна разности угловых скоростей тел относительно Солнца

$$\mathbf{\frac{360°}{S} = \left|\frac{360°}{T_1} - \frac{360°}{T_2}\right|}$$

Знак модуля поставлен потому, что мы не знаем какая из угловых скоростей больше (то есть, какое из тел является внешним, а какое внутренним). Деля обе части уравнение на $\mathbf{360°}$, получаем уравнение синодического движения.

Однако такой вывод пригоден лишь в том случае, когда обе орбиты близки к круговым, а в условии задачи об этом ничего не говорится. Орбиту Венеры можно считать круговой (этот факт можно просто знать, а можно посмотреть на эксцентриситет орбиты Венеры в перечне справочных данных – он близок к нулю), но орбита объекта может быть любой. Поэтому у задачи есть еще один ответ — если орбита объекта сильно вытянута, то некоторая точка этой орбиты находится ближе всего к орбите Венеры. Значит, максимальное сближение происходит, когда тело находится именно в этой точке. А раз (согласно условию) между двумя последовательными максимальными сближения некоторого объекта проходит 5 лет, то и период обращения объекта вокруг Солнца равен тоже 5 лет.

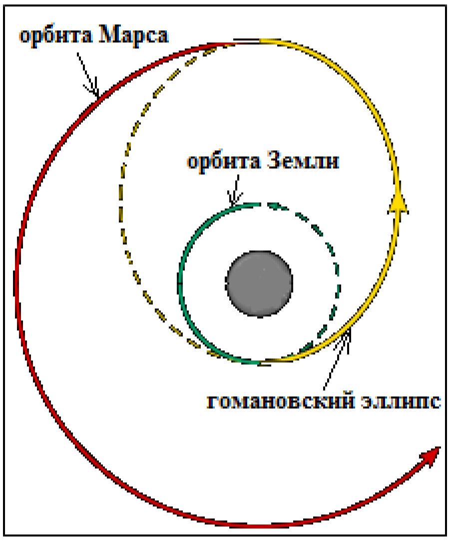
Ответ: $0,76$ года, если орбита объекта круговая и он внешний по отношению к Венере; $0,59$ года, если орбита объекта круговая и он внутренний по отношению к Венере; 5 лет, если орбита объекта вытянутая.

Задача № 4.

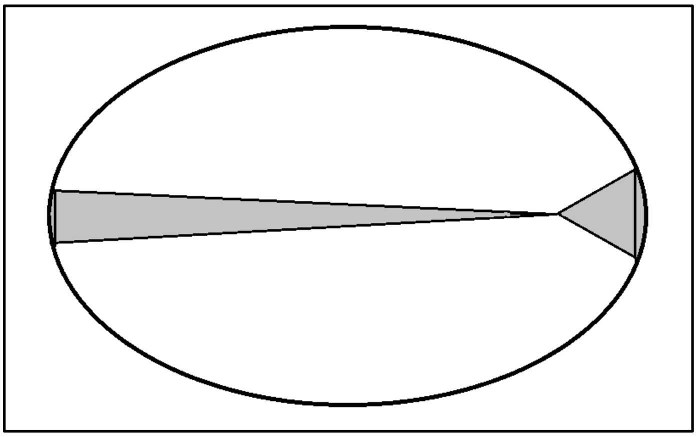
С Земли запустили космический аппарат на орбиту Марса. В момент старта с орбиты Земли аппарат имел скорость 33 км/с относительно Солнца. Какую дополнительную скорость необходимо сообщить аппарату, когда он достигнет орбиты Марса, чтобы аппарат начал двигаться по круговой орбите вокруг Солнца? Считайте, что аппарат летит к орбите Марса по гомановскому эллипсу.

Решение.

Гомановский эллипс - это орбита аппарата в виде эллипса, который в перигелии касается орбиты Земли, а в афелии - орбиты Марса. Назван в честь немецкого учёного Вальтера Гомана (рисунок ниже).



Воспользуемся II законом Кеплера - за равные промежутки времени радиус-вектор объекта «заметает» равные площади. На рисунке ниже серым цветом выделены площади, пройденные по эллиптической орбите за единицу времени.



Запишем его для аппарата в перигелии (на орбите Земли) и в афелии (на орбите Марса). Площади секторов можно считать приближенно равными площадям соответствующих треугольников. Поскольку время единичное, то основания треугольников (хорды, стягивающие сектора) численно равны скоростям в перигелии $\boldsymbol{v_p}$ и афелии $\boldsymbol{v_a}$, а высоты треугольников – перигелийное $\boldsymbol{r_p}$ и афелийное $\boldsymbol{r_a}$ расстояния.

Из равенства площадей делаем вывод:

$$\boldsymbol{v_a \cdot r_a = v_p \cdot r_p}$$

откуда

$$\boldsymbol{v_a = \frac{v_p \cdot r_p}{r_a}}$$

Подставим численные данные для нашего случая: $\boldsymbol{v_p = 33}$ км/с; $\boldsymbol{r_p = 1}$ а. е. (стартуем от Земли), $\boldsymbol{r_a = 1{,}5237}$ а. е. (из перечня справочных данных, финишируем у Марса) и вычислим скорость, с которой аппарат подлетит к орбите Марса.

$$\boldsymbol{v_a} = \frac{\mathbf{33}\ \text{км/с} \cdot \mathbf{1}\ \text{а. е.}}{\mathbf{1{,}5237}\ \text{а. е.}} \approx \mathbf{21{,}66}\ \text{км/с}$$

Чтобы определить дополнительную скорость, необходимо знать скорость самого Марса. Найдем круговую скорость на орбите Марса, воспользовавшись для этого III законом Кеплера:

$$\boldsymbol{\frac{T_{\oplus}{}^2}{r_{\oplus}{}^3} = \frac{T_{♂}{}^2}{r_{♂}{}^3}}$$

где индекс $\oplus$ относится к Земле, а ♂ - к Марсу.

Учитывая, что круговая скорость

$$\boldsymbol{v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}}$$

Выразим $\mathbf{T}$ для Земли и Марса, а затем подставим в выражение III закона Кеплера. В итоге получим

$$\boldsymbol{v_{\oplus}{}^2 \cdot r_{\oplus} = v_{♂}{}^2 \cdot r_{♂}}$$

где $\boldsymbol{v_{\oplus}}$ и $\boldsymbol{v_{♂}}$ - круговые скорости на соответствующих орбитах. Тогда

$$\boldsymbol{v_{♂} = v_{\oplus} \cdot \sqrt{\frac{r_{\oplus}}{r_{♂}}}}$$

Подставляем численные значения, учитывая, что $\boldsymbol{v_{\oplus} = 29{,}8}$ км/с (из перечня справочных данных)

$$\boldsymbol{v_{♂}} = \mathbf{29{,}8}\,\frac{\text{км}}{\text{с}} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{1}\ \text{а. е.}}{\mathbf{1{,}5237}\ \text{а. е.}}} \approx \mathbf{24{,}14}\ \text{км/с}$$

Значит, на орбите Марса потребуется придать дополнительную скорость

$$\Delta v = v_{♂} - v_a = 24,14\frac{\text{км}}{\text{с}} - 21,66\frac{\text{км}}{\text{с}} = 2,48 \text{ км/с}$$

Ответ: около $2,48$ км/с

Задача № 5.

В некоторый момент времени число Вольфа для Солнца равно 160. Считая, что 30% пятен входило в группы по 3 пятна в каждой, а 20% пятен входило в группы по 2 пятна в каждой, найдите количество пятен на Солнце в этот момент.

Решение.

Число Вольфа вычисляется по формуле

$$W = f + 10 \cdot g$$

где f – общее количество пятен (как входящих в группы, так и одиночных), а g - количество групп пятен. Одиночное пятно также считается группой.

Известно, что в группы по три входит 30% пятен, поэтому количество пятен, входящих в группы по три, равно $0,3 \cdot f$. Тогда число групп по три пятна равно $\frac{0,3 \cdot f}{3} = 0,1 \cdot f$.

Известно, что в группы по два входит 20% пятен, поэтому количество пятен, входящих в группы по два, равно $0,2 \cdot f$. Тогда число групп по два пятна равно $\frac{0,2 \cdot f}{2} = 0,1 \cdot f$.

Количество одиночных пятен равно $f - 0,3 \cdot f - 0,2 \cdot f = 0,5 \cdot f$ (из общего числа пятен вычитаем количества, входящие в группы по 3 и по 2 пятна соответственно). Тогда количество групп g (включая «группы» по одному пятну) равно

$$g = 0,5 \cdot f + 0,1 \cdot f + 0,1 \cdot f = 0,7 \cdot f$$

Отсюда, число Вольфа

$$W = f + 10 \cdot 0,7 \cdot f = 8 \cdot f$$

Подставляя численные данные, получим

$$160 = 8 \cdot f$$

$$f = 20$$

Так что в описываемый момент на Солнце было 20 пятен, из которых 6 пятен образовывали две группы по три пятна, а 4 пятна - две группы по два пятна.

Ответ: 20 пятен.

Задача № 6.

Научный космический аппарат массой $1\,000$ кг и линейными размерами 10 м послали к чёрной дыре массой 10 масс Солнца. Аппарат выдерживает силу натяжения

$\mathbf{10^7}$ Н. На каком расстоянии от черной дыры он погибнет? Считайте, что на аппарат действует только сила тяготения.

Решение.

Сила тяготения, действующая на космический аппарат со стороны чёрной дыры, равна

$$\boldsymbol{F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}}$$

где $\boldsymbol{G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}}$ $\text{м}^{\mathbf{3}} \cdot \text{кг}^{\mathbf{-1}} \cdot \text{с}^{\mathbf{-2}}$— гравитационная постоянная (из перечня справочных данных), $\boldsymbol{m}$ – масса аппарата, $\boldsymbol{M = 5 \cdot M_{\odot}}$ – масса чёрной дыры, а $\boldsymbol{r}$ – расстояние от чёрной дыры до аппарата.

Так как аппарат имеет ненулевые размеры, то силы, действующие на разные его стороны, различаются. Если разность этих сил – так называемые приливные силы превысят допустимую для аппарата силу натяжения, то его разорвёт. Вычислим действующие на аппарат приливные силы:

$$\boldsymbol{\Delta F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} - G \cdot \frac{m \cdot M}{(r+l)^2}}$$

где $\boldsymbol{l}$ – линейные размеры аппарата.

$$\boldsymbol{\Delta F = G \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right) = G \cdot m \cdot M \cdot \frac{(r+l)^2 - r^2}{r^2 \cdot (r+l)^2} = G \cdot m \cdot M \cdot \frac{2 \cdot r \cdot l + l^2}{r^2 \cdot (r+l)^2}}$$

В полученном выражении $\boldsymbol{l}$ и тем более $\boldsymbol{l^2}$ пренебрежимо малы по сравнению с $\boldsymbol{r}$. В итоге, имеем

$$\boldsymbol{\Delta F \approx G \cdot m \cdot M \cdot \frac{2 \cdot r \cdot l}{r^2 \cdot r^2} = G \cdot m \cdot M \cdot \frac{2 \cdot r \cdot l}{r^4} = G \cdot m \cdot M \cdot \frac{2 \cdot l}{r^3}}$$

$$\boldsymbol{\Delta F \approx \frac{10 \cdot G \cdot m \cdot M_{\odot} \cdot l}{r^3}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r \approx \sqrt[3]{\frac{100 \cdot G \cdot m \cdot M_{\odot} \cdot l}{\Delta F}}}}$$

Подставляя численные данные, получим

$$\boldsymbol{r \approx \sqrt[3]{\frac{100 \cdot 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1000\ \text{кг} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{кг}\ \cdot 10\ \text{м}}{10^7\ \text{Н}}} \approx 2\,400\ \text{км}}$$

Ответ: примерно **2 400** км.