8 класс

Задача № 1.

Укажите географические широты мест на поверхности Земли, в которых предметы в полдень могут не отбрасывать тень.

Решение.

Предметы не отбрасывают тень тогда, когда Солнце находится в зените. Известно, что Солнце бывает в зените в полдень на широтах $-\boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{\varphi} \leq \boldsymbol{\varepsilon}$ (где $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{23}° \, \mathbf{26}' \mathbf{21.45}'' \approx \mathbf{23,5}°$ - угол наклона небесного экватора к эклиптике, из перечня справочных данных). Это означает от $\mathbf{23,5}°$ северной широты до $\mathbf{23,5}°$ южной широты, то есть между северным и южным тропиками (включая сами тропики). Однако предмет может не отбрасывать в полдень тени еще и тогда, когда Солнца в полдень нет на небе совсем. Такое бывает во время полярной ночи на широтах от $\mathbf{66,5}°$ до $\mathbf{90}°$ северной широты и от $\mathbf{66,5}°$ до $\mathbf{90}°$ южной широты (то есть между полярными кругами и полюсами в обоих полушариях).

Ответ: $+\mathbf{66,5}° \leq \boldsymbol{\varphi} \leq \mathbf{90}°$; $-\mathbf{23,5}° \leq \boldsymbol{\varphi} \leq \mathbf{23,5}°$; $-\mathbf{90}° \leq \boldsymbol{\varphi} \leq -\mathbf{66,5}°$.

Задача № 2.

Все звёзды по особенностям излучаемого ими света делятся на спектральные классы, которые обозначаются буквами латинского алфавита. Оцените количество звёзд спектрального класса $\boldsymbol{B}$ в нашей Галактике. Считайте, что такая звезда образуется примерно $\mathbf{1}$ раз в $\mathbf{50}$ лет, а время её жизни порядка ста миллионов лет.

Решение.

Пусть в какой-то момент в Галактике образовалась первая звезда спектрального класса $\boldsymbol{B}$, она будет жить $\mathbf{10^8}$ лет. И на протяжении всей её жизни каждые $\mathbf{50}$ лет будет рождаться следующая такая же звезда, то есть через $\mathbf{50}$ лет таких звёзд будет уже две, через $\mathbf{100}$ лет - $\mathbf{3}$, через $\mathbf{150}$ - $\mathbf{4}$ и так далее. Видно, что число звезд через $\boldsymbol{n}$ лет после рождения первой равно

$$\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{50}} + \mathbf{1}$$

Однако после $\mathbf{10^8}$ лет первая родившаяся звезда прекратит свое существование, поэтому, вычисляя число звезд, можно просто делить прошедшее время на $\mathbf{50}$ лет и не заботиться о прибавлении к результату единицы (к тому же числа в условии задачи заданы приближенно). Таким образом, в Галактике после того, как пройдёт $\mathbf{10^8}$ лет будет примерно

$$\frac{\mathbf{10^8}}{\mathbf{50}} = \frac{\mathbf{100 \cdot 10^6}}{\mathbf{50}} = \mathbf{2 \cdot 10^6}$$

звёзд. То есть порядка двух миллионов.

В дальнейшем, примерно каждые 50 лет будет «рождаться» и «умирать» одна звезда, так что среднее количество звезд спектрального класса $\boldsymbol{B}$ будет в Галактике постоянным (если не будет изменяться скорость рождения таких звезд). Но указаний на изменение скорости рождения в условии задачи нет.

Ответ: примерно два миллиона.

Задача № 3.

В каком году в первый раз после 2019 в феврале будет пять понедельников? Ответ обоснуйте.

Решение.

Пять понедельников в феврале будет только в том случае, если год будет високосным и в феврале будет 29 дней. Тогда если первое (а значит и восьмое, пятнадцатое, двадцать второе и двадцать девятое) число - понедельник, то тогда условие задачи будет выполнено.

Необходимо выяснить, как меняются дни недели, соответствующие первому февраля из года в год. В обычном году 365 суток, значит при делении этого числа на 7 (число суток в неделе) в остатке получим 1 – это означает, что в году, следующем за обычным, день недели, соответствующий 1 февраля, сдвигается на один вперёд (если была среда, то в следующем году будет четверг). Такие же рассуждения позволяют понять, что в году, следующем за високосным, сдвиг будет на два дня вперёд (если 1 февраля високосного года была среда, то в следующем году будет пятница). В каждой группе из четырёх лет 3 обычных года и 1 високосный, поэтому за четыре года 1 февраля сдвинется на пять дней вперёд (или, что аналогично, на два дня назад).

1 февраля текущего (2019) года приходилось на пятницу (это легко определить, если знать дату и день недели этой олимпиады). Так как 2019 год обычный, то в 2020 (високосном) году 1 февраля будет субботой. Тогда в следующем високосном – 2024 первое февраля придётся на четверг, затем в 2028 – на вторник, в 2032 – на воскресенье, в 2036 на пятницу, в 2040 – на среду, и, наконец, в 2044 первое февраля придётся на понедельник. А значит, именно в 2044 году впервые после 2019 года в феврале будет пять понедельников.

Тот же ответ можно получить иначе. В 2020 (високосном) году 1 февраля приходится на субботу, значит в предыдущем високосном (2016) оно приходилось на понедельник. Следовательно, следующий високосный год, в котором 1 февраля придётся на понедельник, будет через 28 лет. Так как 28 - это наименьшее общее кратное чисел 4 (период повторения високосных лет) и 7 (период повторения дней недели). Тогда $2016 + 28 = 2044$.

Ответ: в 2044 году.

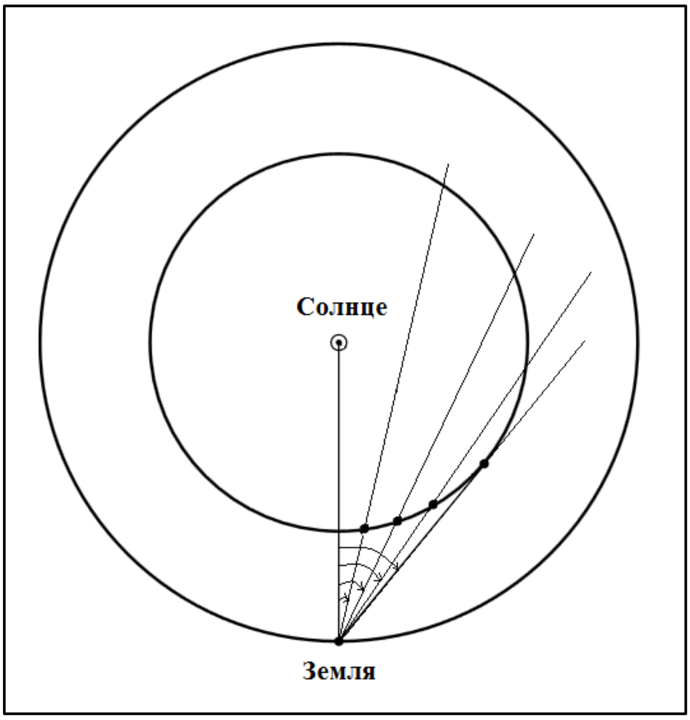
Задача № 4.

Максимальная элонгация какого-либо объекта, это такое его положение на небе, когда при наблюдении с Земли угловое расстояние на небе между этим объектом и

Солнцем максимально. Пусть Меркурий находится в максимальной элонгации, докажите, что расстояние от Земли до Меркурия меньше одной астрономической единицы.

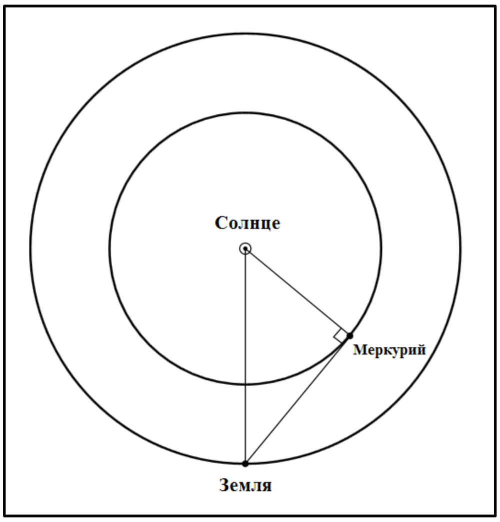
<u>Решение.</u>

Изобразим описанную в задаче ситуацию на рисунке.



Видно, что максимальное угловое расстояние от Солнца при наблюдении с Земли Меркурий будет иметь в том случае, если он находится в такой точке орбиты, что прямая, проведенная от Земли к Меркурию, только в одной точке касается его орбиты (то есть является касательной к орбите).

По свойству касательной, радиус окружности, проведенный к Меркурию (то есть отрезок, соединяющий Меркурий и Солнце) перпендикулярен прямой, соединяющей Землю и Меркурий. Следовательно, в момент максимальной элонгации Солнце, Меркурий и Земля являются вершинами прямоугольного треугольника (рисунок ниже).



При этом отрезок Земля-Меркурий является катетом этого треугольника, а отрезок Солнце-Земля гипотенузой, которая равна $\mathbf{1}$ а.е. Так как катет всегда меньше гипотенузы, то и расстояние между Меркурием и Землей в максимальной элонгации меньше $\mathbf{1}$ а.е.

<u>Задача № 5.</u>

Непосредственное измерение угловых размеров звёзд очень сложная задача, поэтому было предложено использовать метод покрытия звёзд Луной. То есть измеряется время, в течение которого край диска Луны пересекает диск звезды. Считая, что угловой размер измеряемого диска звезды равен $\mathbf{0,001''}$, вычислите, сколько снимков в секунду минимально должна делать фотокамера для того, чтобы успешно провести измерения. Считайте, что на время измерения наблюдатель и звезда неподвижны относительно друг друга.

<u>Решение.</u>

Так как на время измерения наблюдатель и звезда неподвижны относительно друг друга, то время пересечения диска звезды краем лунного диска определяется угловой скоростью движения Луны относительно наблюдателя на Земле. Угловая скорость движения Луны по небесной сфере равна

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{T}}$$

где $\boldsymbol{T}$ – время одного оборота Луны вокруг Земли (из перечня справочных данных). Тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{27,321662}\ \text{суток}} = \frac{\mathbf{360 \cdot 3600''}}{\mathbf{27,321662 \cdot 24 \cdot 3600}\ \text{секунд}} \approx \mathbf{0,55}\ ''/\text{с}$$

То есть угловой диск звезды край лунного диска пересечёт за время

$$\boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{0,001''}}{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\mathbf{0,001''}}{\mathbf{0,55}\ ''/\text{с}} \approx \mathbf{0,0018}\ \text{с}$$

Пусть ваша фотокамера делает $\boldsymbol{n}$ снимков в секунду, тогда с её помощью можно измерить интервал времени не меньше $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ секунд.

Значит нам необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{t}$$

или

$$\boldsymbol{n} > \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}}$$

Подставляем численные данные и находим $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{n} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0,0018}\ \text{с}} \approx \mathbf{555,6}$$

Значит, фотокамера должна делать не менее $\mathbf{556}$ кадров в секунду.

Ответ: $\mathbf{556}$ кадров в секунду.

Задача № 6.

Многие звёзды в конце своей «жизни» сбрасывают свои внешние слои. Пусть звезда сбросила внешний слой массой $\mathbf{10^{30}}$ кг и этот слой расширяется так, что его внешний край удаляется от звезды с постоянной скоростью $\mathbf{15}$ км/с, а толщина слоя равна одной трети внешнего радиуса. Этот слой становится невидимым для земного наблюдателя, когда его средняя плотность оказывается меньше $\mathbf{10^{-22}}$ кг/м$^{\mathbf{3}}$. Через какое время после сброса слоя он станет недоступен наблюдениям?

Решение.

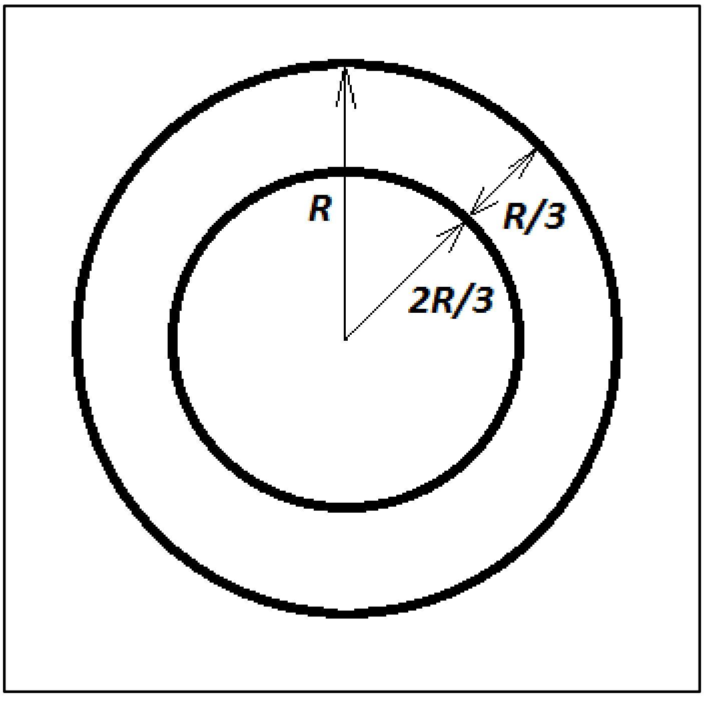
Пусть внешний радиус, при котором слой становится невидимым, равен $\boldsymbol{R}$. Тогда искомое время

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{v}}$$

Масса слоя $\boldsymbol{M}$ все время остается постоянной, поэтому можно найти такой объем слоя $\boldsymbol{V}$, при котором он будет иметь среднюю плотность $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{10^{-22}}$кг/м$^{\mathbf{3}}$:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathbf{10^{30}}\ \text{кг}}{\mathbf{10^{-22}}\ \text{кг/м}^{\mathbf{3}}} = \mathbf{10^{52}}\ \text{м}^{\mathbf{3}} = \mathbf{10^{43}}\ \text{км}^{\mathbf{3}}$$

Так как толщина слоя всегда равна одной трети внешнего радиуса, то внешняя граница слоя - шар радиусом $\boldsymbol{R}$, а внутренняя - шар радиусом $\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{R}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{R}}{\mathbf{3}}$, (смотри рисунок ниже).



Тогда очевидно, что объем слоя будет равен разности объемов большого $\boldsymbol{V_1}$ и малого $\boldsymbol{V_2}$ шаров. Объем шара $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$. Если неизвестна формула объема шара, то для приближённой оценки можно воспользоваться формулой объема куба с ребром $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{V = R^3}$. Тогда при вычислении $\boldsymbol{R}$ ошибка будет примерно в $\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot \pi}{4}} \approx 1,5}$ раза.

Найдём объём оболочки

$$\boldsymbol{V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot R}{3}\right)^3 = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^3 - \frac{8 \cdot R^3}{27}\right) = \frac{76 \cdot \pi}{81} \cdot R^3}$$

Приравниваем найденные объёмы и находим $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{10^{43}}\ \text{км}^3 = \boldsymbol{\frac{76 \cdot \pi}{81} \cdot R^3}$$

$$\boldsymbol{R} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{81 \cdot 10^{43}}\ \text{км}^3}{\boldsymbol{76 \cdot \pi}}} \approx \boldsymbol{1,5 \cdot 10^{14}}\ \text{км}$$

Вычислим время

$$\boldsymbol{t = \frac{R}{v}} = \frac{\boldsymbol{1,5 \cdot 10^{14}}\ \text{км}}{\boldsymbol{15}\ \text{км/с}} = \boldsymbol{10^{13}}\ \text{с} \approx \boldsymbol{317\,098}\ \text{лет} \approx \boldsymbol{320\,000}\ \text{лет}$$

Ответ: примерно **320 000** лет.