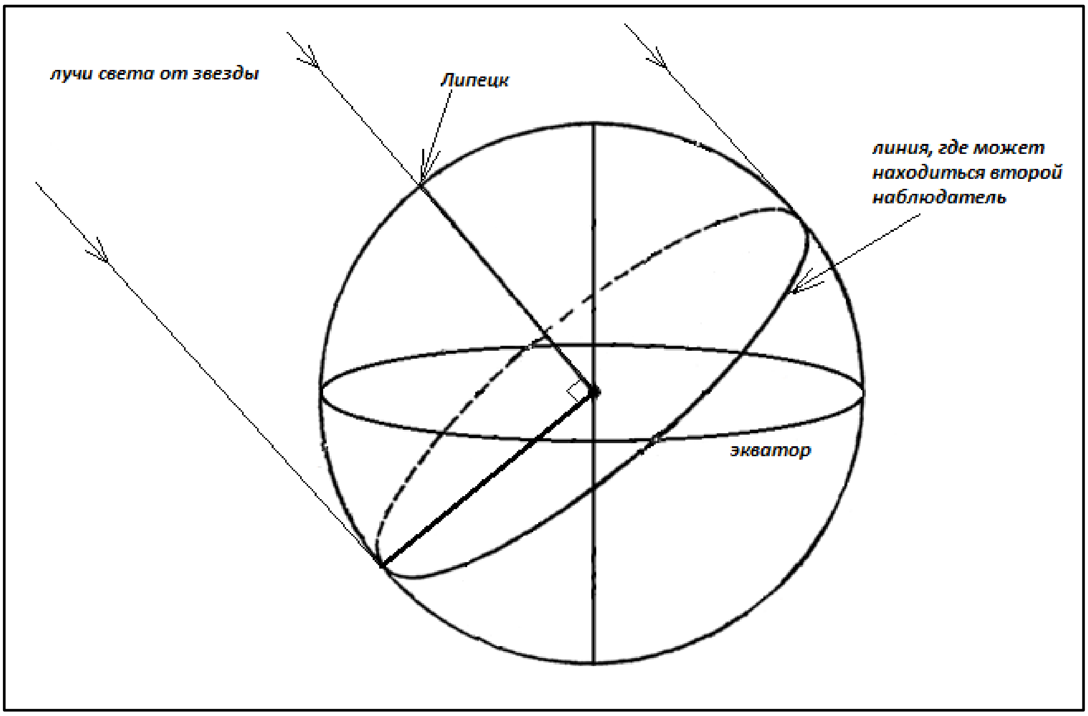
9 класс

Задача № 1.

Вы, находясь в Липецке, наблюдаете некоторую звезду в зените $\mathbf{21}$ июня. Ваш друг, в другом месте, в тот же момент времени наблюдает ту же звезду у горизонта. Оцените расстояние между местами наблюдения. Вычислите примерные географические координаты точки Земного шара, в которой может находиться второе место наблюдения. Географические координаты Липецка: широта $\boldsymbol{\varphi = 52,5}$° и долгота $\boldsymbol{\lambda = 39,5}$°?

Решение.

Заметим, что указанная в условии звезда не может быть Солнцем — в Липецке оно в зените не бывает. Поскольку оба наблюдают одну и ту же далекую звезду, то направление на нее из обоих городов должно совпадать. Однако в Липецке это направление совпадает с направлением радиуса Земли, проведенного к городу, а в другом месте — перпендикулярно ему. Следовательно, радиусы, проведенные к Липецку и другому месту наблюдения, должны быть перпендикулярны друг другу (смотри рисунок ниже).



Поскольку Земля — шар, это означает, что расстояние между местами наблюдения составляет четверть окружности Земли. Длина окружности Земли равна

$$\boldsymbol{L = 2 \cdot \pi \cdot R_{\oplus} = 2 \cdot 3,14 \cdot 6368} \text{ км} \approx \mathbf{40\,000} \text{ км}$$

где $\boldsymbol{R_{\oplus}}$ - средний радиус Земли (вычислен как среднее арифметическое полярного и экваториального радиусов Земли из перечня справочных данных). Значит расстояние между местами наблюдения около $\mathbf{10\,000}$ км.

Можно заметить, что оба астронома наблюдали звезду одновременно, и в Липецке в этот момент были самые короткие ночи ($\mathbf{21}$ июня – день летнего солнцестояния). Отсюда можно сделать вывод, что оба города находятся примерно на одном и том же меридиане, иначе, когда в одном из них темно, в другом будет светло, и наблюдать звезды будет невозможно.

Оценим географические координаты второго места наблюдения. Широта должна отличаться на $\mathbf{90°}$, а долгота примерно совпадать. В этом случае получаем широта $\boldsymbol{\varphi = -37,5°}$ и долгота $\boldsymbol{\lambda = 39,5°}$. Эта точка расположена в южной части Индийского океана, недалеко от южной оконечности Африки (смотри рисунок ниже).

Ответ: расстояние около $\mathbf{10\ 000}$ км; координаты: $\boldsymbol{\varphi = -37,5°}$ и $\boldsymbol{\lambda = 39,5°}$.

Задача № 2.

Скопление содержит $\mathbf{625}$ карликовых галактик, видимая звездная величина каждой из которых $\boldsymbol{m = 29^m}$ и одну гигантскую галактику. Известно, что все небольшие галактики светят как одна гигантская. Вычислите видимую звёздную величину гигантской галактики.

Решение.

Световой поток от гигантской галактики в $\mathbf{625}$ раз больше, чем от одной карликовой галактики. Представим это число в виде

$$\mathbf{625 = 6,25 \cdot 100}$$

Разница в световых потоках в $2,5$ раза примерно соответствует 1^m, разница в световых потоках в $2,5 \cdot 2,5 = 6,25$ раз примерно соответствует 2^m разница в световых потоках в 100 раз примерно соответствует 5^m. Значит гигантская галактика примерно на $2 + 5 = 7$ звёздных величин ярче одной карликовой. Тогда видимая звёздная величина гигантской галактики около

$$29^m - 7^m = 22^m$$

Если школьник 9 класса вдруг знает формулу Пòгсона, то похожий ответ можно получить иначе

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot lg\frac{I_1}{I_2}$$

Пусть индекс 1 относится к гигантской галактике, а индекс 2 к карликовой галактике, тогда

$$m_1 - 29^m = -2,5 \cdot lg\frac{625}{1}$$

Откуда

$$m_1 = 29^m - 7,5^m \approx 21,5^m$$

Ответ: около 22^m

Задача № 3.

Промежуток времени между последовательными максимальными сближениями объекта Солнечной системы с Венерой равен 5 лет. Вычислите возможный период обращения этого объекта вокруг Солнца. Считайте, что орбиты Венеры и объекта лежат в одной плоскости.

Решение.

Уравнение синодического движения

$$\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right|$$

где S – синодический период движения тела 2 относительно тела 1 (или наоборот), T_1 и T_2 – сидерические периоды движения соответственно тел 1 и 2 вокруг Солнца.

Пусть телом 1 будет Венера, а телом 2 объект, упомянутый в условии. Тогда, если выражать все периоды в годах, получаем

$$\frac{1}{5} = \left|\frac{1}{0,62} - \frac{1}{T_2}\right|$$

где $0,62$ – сидерический период обращения Венеры вокруг Солнца в земных годах (данные взяты из перечня справочных данных и пересчитаны в годы). Тогда

$$\left|\frac{T_2 - 0,62}{0,62 \cdot T_2}\right| = \frac{1}{5}$$

$$\frac{|T_2 - 0,62|}{|0,62 \cdot T_2|} = \frac{1}{5}$$

Так как $T_2 > 0$, то $|T_2| = T_2$, тогда

$$5 \cdot |T_2 - 0,62| = 0,62 \cdot T_2$$

Решение этого уравнения зависит от знака выражения внутри модуля.

1) Пусть $T_2 - 0,62 > 0$, (то есть $T_2 > 0,62$ и тело 2 внешнее по отношению к Венере), тогда $|T_2 - 0,62| = T_2 - 0,62$ и мы получаем

$$5 \cdot (T_2 - 0,62) = 0,62 \cdot T_2$$

$$T_2 = \frac{3,31}{4,38}\text{года} \approx 0,76 \text{ года}$$

2) Теперь пусть $T_2 - 0,62 < 0$ (то есть $T_2 < 0,62$ и тело 2 внутреннее по отношению к Венере), тогда $|T_2 - 0,62| = -(T_2 - 0,62)$ и мы получаем

$$-5 \cdot (T_2 - 0,62) = 0,62 \cdot T_2$$

$$T_2 = \frac{3,31}{5,62}\text{года} \approx 0,59 \text{ года}$$

Использованное нами уравнение синодического движения выводится из следующих соображений. Тело 1, обращаясь вокруг Солнца, движется с угловой скоростью $\frac{360°}{T_1}$, а тело 2 – с угловой скоростью $\frac{360°}{T_2}$. Тогда тело 2 относительно тела 1 (или наоборот) движется с угловой скоростью $\frac{360°}{S}$, которая равна разности угловых скоростей тел относительно Солнца

$$\frac{360°}{S} = \left|\frac{360°}{T_1} - \frac{360°}{T_2}\right|$$

Знак модуля поставлен потому, что мы не знаем какая из угловых скоростей больше (то есть, какое из тел является внешним, а какое внутренним). Деля обе части уравнение на $360°$, получаем уравнение синодического движения.

Однако такой вывод пригоден лишь в том случае, когда обе орбиты близки к круговым, а в условии задачи об этом ничего не говорится. Орбиту Венеры можно считать круговой (этот факт можно просто знать, а можно посмотреть на эксцентриситет орбиты Венеры в перечне справочных данных – он близок к нулю), но орбита объекта может быть любой. Поэтому у задачи есть еще один ответ — если орбита объекта сильно вытянута, то некоторая точка этой орбиты находится ближе всего к орбите Венеры. Значит, максимальное сближение происходит, когда тело находится именно в этой точке. А раз (согласно условию) между двумя последовательными максимальными сближения некоторого объекта проходит 5 лет, то и период обращения объекта вокруг Солнца равен тоже 5 лет.

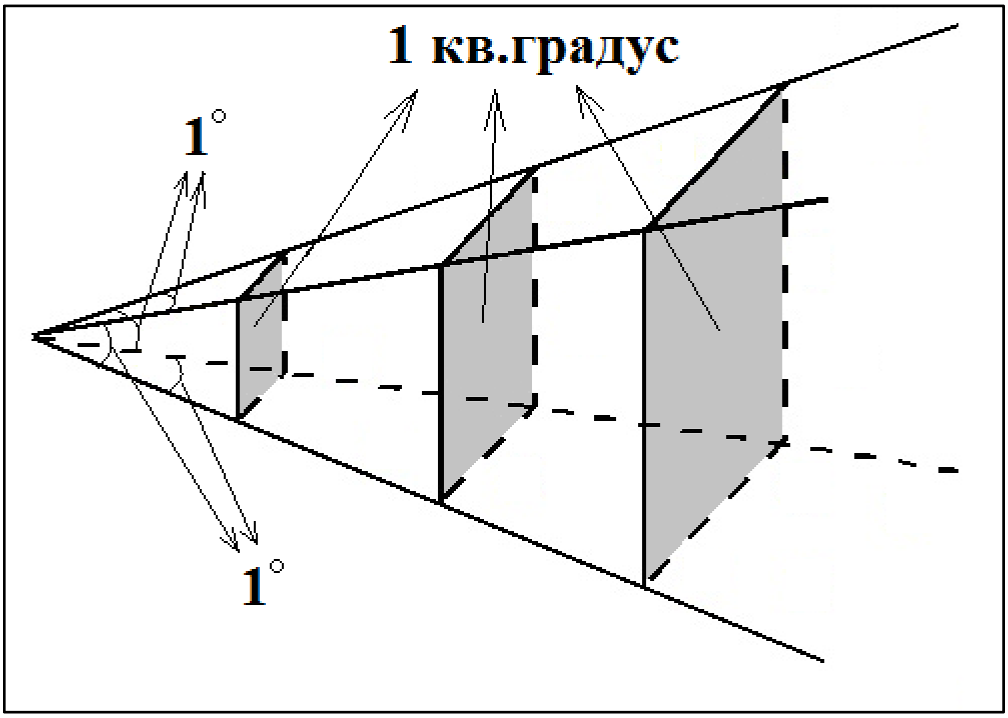
Ответ: $0,76$ года, если орбита объекта круговая и он внешний по отношению к Венере; $0,59$ года, если орбита объекта круговая и он внутренний по отношению к Венере; 5 лет, если орбита объекта вытянутая.

Задача № 4.

Чему равна средняя площадь одного созвездия в квадратных градусах? Ответ обоснуйте расчётами.

Решение.

Квадратный градус — это участок на небесной сфере (приближённно квадрат) размером $\mathbf{1^\circ \times 1^\circ}$ (смотри рисунок ниже). Каждая площадка, закрашенная серым цветом, имеет площадь $\mathbf{1}$ квадратный градус.



Общее количество созвездий на небе известно – $\mathbf{88}$. Значит средняя площадь одного созвездия

$$\boldsymbol{S}_{\text{ср}} = \frac{\boldsymbol{S}_{\text{сферы}}}{\mathbf{88}}$$

где $\boldsymbol{S}_{\text{сферы}}$ – это площадь всей небесной сферы в квадратных градусах.

Площадь сферы вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S}_{\text{сферы}} = \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}$$

где $\boldsymbol{R}$ – это радиус сферы.

То есть, если радиус выражен в метрах, то площадь получим в квадратных метрах, если в километрах – то в квадратных километрах и т.д. Можно ли выразить радиус в градусах? Если нам это удастся, то тогда мы получим площадь сферы в квадратных градусах.

Всем известно, что один полный оборот по окружности соответствует углу $\mathbf{360}^\circ$, то есть $\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{R}$ единиц длины равны $\mathbf{360}^\circ$ (угловых единиц).

$$\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{R} = \mathbf{360}^\circ$$

тогда

$$\boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\pi}}$$

Вот мы и выразили радиус в угловых единицах – градусах. Осталось подставить его в полученную выше формулу

$$\boldsymbol{S}_{\text{сферы}} = \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \left(\frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\pi}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{360^2}}{\boldsymbol{\pi}} \approx \mathbf{41\ 253} \text{ квадратных градуса}$$

Значит, окончательно получаем

$$\boldsymbol{S}_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{41\ 253} \text{ квадратных градуса}}{\mathbf{88}} \approx \mathbf{469} \text{ квадратных градуса}$$

Можно получить приближённую оценку другим путём. Сравним небесную сферу с поверхностью Земли, на которой координаты каждой точки задаются широтой (диапазон изменения которой составляет $\mathbf{180°}$) и долготой (диапазон изменения - $\mathbf{360°}$).

Тогда можно сказать, что поверхность любой сферы (и Земли, и небесной сферы в том числе) составляет примерно $\mathbf{180° \cdot 360° = 64\ 800}$ квадратных градусов. На самом деле этот результат сильно завышен, поскольку в окрестности полюсов сферы меридианы расположены плотнее, однако для очень приближённой оценки им можно воспользоваться. В итоге получаем, что средняя площадь одного созвездия составляет $\frac{\mathbf{64\ 800}}{\mathbf{88}} \approx \mathbf{736}$ квадратных градусов.

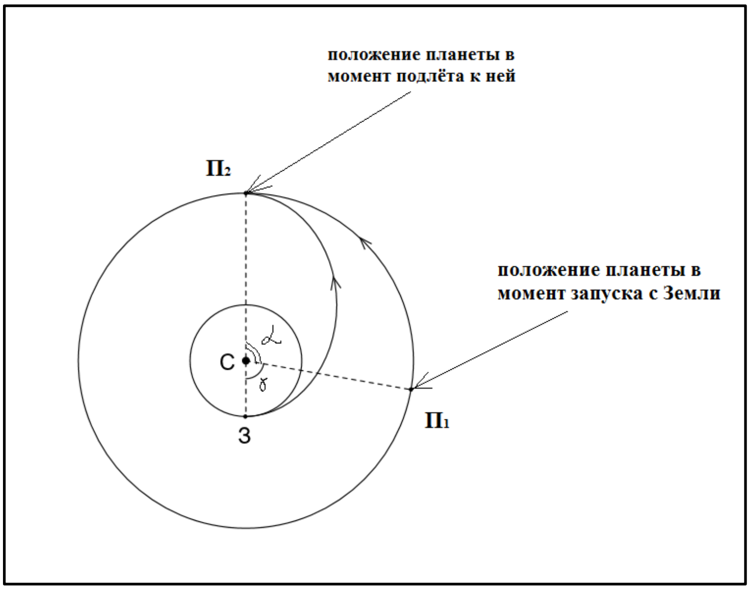
Ответ: примерно $\mathbf{469}$ квадратных градуса

Задача № 5.

С Земли к Сатурну по оптимальной орбите был запущен космический аппарат. На каком угловом расстоянии друг от друга были Земля и Сатурн при наблюдении с Солнца в момент запуска? Орбиты Земли и Сатурна считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение.

Оптимальная (наиболее экономичная) орбита – это эллипс, в перигелии касающийся орбиты Земли, а в афелии - орбиты Сатурна (так называемый эллипс Гомана) (смотри рисунок ниже).



На рисунке точки $\boldsymbol{C}$, З, и $\Pi_{\mathbf{1}}$ – положение соответственно Солнца, Земли и Сатурна во время старта аппарата, $\Pi_{\mathbf{2}}$ - положение Сатурна во время финиша.

Тогда большая полуось эллипса Гомана равна

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{r}_{\oplus}+\boldsymbol{r}_{♄}}{\mathbf{2}}$$

где символ $\oplus$ относится к Земле, символ ♄ - к Сатурну.

Подставим численные данные

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{1}\text{ а. е.}+\mathbf{9{,}5388}\text{ а. е.}}{\mathbf{2}}\approx\mathbf{5{,}27}\text{ а. е.}$$

где $\boldsymbol{r}_{♄}=\mathbf{9{,}5388}$ а. е. (из перечня справочных данных).

Запишем третий закон Кеплера, выразив большую полуось $\boldsymbol{a}$ в астрономических единицах, а период обращения вокруг Солнца $\boldsymbol{T}$ в годах

$$\boldsymbol{T}^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}$$

Применив этот закон к космическому аппарату, получим

$$\boldsymbol{T}=\sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}}=\sqrt{(\mathbf{5{,}27}\text{ а. е.})^{\mathbf{3}}}\approx\mathbf{12{,}1}\text{ года}$$

Так как нашему аппарату необходимо пролететь только половину орбиты, то время перелёта равно

$$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{T}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{12{,}1}\text{ года}}{\mathbf{2}}\approx\mathbf{6{,}05}\text{ года}$$

Период обращения Сатурна (то есть оборот на $\mathbf{360}°$) $\boldsymbol{T}_{♄}=\mathbf{29{,}458}$ года (из перечня справочных данных), тогда за $\boldsymbol{t}=\mathbf{6{,}05}$ года, он проходит по своей орбите угол равный

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathbf{360}°}{\boldsymbol{T}_{♄}}\cdot\boldsymbol{t}=\frac{\mathbf{360}°}{\mathbf{29{,}458}\text{ года}}\cdot\mathbf{6{,}05}\text{ года}\approx\mathbf{74}°$$

Значит угол между направлением на Землю и Сатурн при наблюдении с Солнца в момент старта равно

$$\gamma = 180° - \alpha = 180° - 74° = 106°$$

Ответ: около $106°$

Задача № 6.

Вдоль земного экватора на высоте 8 км с запада на восток летит самолёт со скоростью 1000 км/ч относительно поверхности. Искусственный спутник Земли обращается по круговой орбите так, что всё время находится над самолётом. Найдите расстояние между спутником и самолётом.

Решение.

Самолёт движется со скоростью $v = 1000$ км/ч относительно точки на экваторе Земли, которая сама движется в ту же сторону за счёт осевого вращения Земли. Скорость этого движения определяется формулой

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{\oplus\text{экв}}}{T_0}$$

где $R_{\oplus\text{экв}} = 6378,14$ км — экваториальный радиус Земли (из перечня справочных данных), $T_0 \approx 23,93$ ч — продолжительность звёздных суток (переведено в часы значение из перечня справочных данных $T_0 = 23 + \frac{56}{60} + \frac{4}{3600} \approx 23,93$ ч). Подставляя численные значения, получим

$$v_0 = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6378,14\ \text{км}}{23,93\ \text{ч}} \approx 1673,83\ \text{км/ч}$$

Полная скорость самолёта относительно центра Земли составляет $v + v_0$. Двигаясь с такой скоростью, самолёт сделает полный оборот вокруг Земли за время

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_{\oplus\text{экв}} + h)}{v + v_0}$$

здесь h — высота самолёта над поверхностью Земли. Подставляя численные данные, имеем

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (6378,14\ \text{км} + 8\ \text{км})}{1000\ \text{км/ч} + 1673,83\ \text{км/ч}} \approx 15\ \text{ч} = 54\,000\ \text{с} = 5,4 \cdot 10^4\ \text{с}$$

Чтобы постоянно находиться над самолётом, искусственный спутник должен обращаться вокруг Земли в том же направлении с тем же периодом T.

Радиус орбиты спутника можно вычислить из III обобщённого закона Кеплера: при круговом движении тела с массой m, с периодом T и радиусом орбиты r вокруг тела с массой M справедливо соотношение

$$\frac{\boldsymbol{r}^3}{\boldsymbol{T}^2 \cdot (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{m})} = \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{\pi}^2}$$

где $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{6{,}672 \cdot 10^{-11}}$ $\text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$— гравитационная постоянная (из перечня справочных данных), $\boldsymbol{m}$ – масса спутника, $\boldsymbol{T}$ – период обращения спутника, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\oplus} = \boldsymbol{5{,}974 \cdot 10^{24}}$ кг - масса Земли (из перечня справочных данных). Поскольку масса спутника много меньше массы Земли ($\boldsymbol{m} \ll \boldsymbol{M}_{\oplus}$), то ею можно пренебречь, тогда для радиуса орбиты $\boldsymbol{r}$ получим

$$\boldsymbol{r} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{M}_{\oplus} \cdot \boldsymbol{T}^2}{\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{\pi}^2}}$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\boldsymbol{r} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{6{,}672 \cdot 10^{-11}}\ \text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \boldsymbol{5{,}974 \cdot 10^{24}}\ \text{кг}\ \cdot (\boldsymbol{5{,}4 \cdot 10^4}\ \text{с})^2}{\boldsymbol{4 \cdot 3{,}14^2}}} \approx \boldsymbol{30\,888}\ \text{км}$$

Значит расстояние между спутником и самолётом

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{R}_{\oplus\text{экв}} + \boldsymbol{h})$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{30\,888}\ \text{км} - (\boldsymbol{6378{,}14}\ \text{км} + \boldsymbol{8}\ \text{км}) \approx \boldsymbol{24\,502}\ \text{км}$$

Ответ: около $\boldsymbol{24\,502}$ км