Ключи к заданиям и рекомендуемые критерии оценивания

1 задание (8 баллов).
Вычислите значение константы в третьем законе Кеплера.

Решение.
Третий закон Кеплера:

$$\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{a}^3} = const$$

Для движения по круговой орбите его можно переписать так:

$$\frac{T^2}{R^3} = const$$

Скорость движения при этом будет равна:

$$v = \frac{2 \times \pi \times R}{T}$$

Движение по круговой орбите возможно при условии, что скорость (v) является первой космической:

$$v_I = \sqrt{\frac{G \times M}{R}},$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса Солнца, R – радиус орбиты.
Возводя в квадрат правые части двух последних уравнений и приравнивая их, можно получить искомое значение константы третьего закона Кеплера:

$$\frac{4 \times \pi^2 \times R^2}{T^2} = \frac{G \times M}{R}$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4 \times \pi^2}{G \times M}$$

Т.е.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4 \times 9{,}86}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}} = 2{,}96 \times 10^{-19}\ \left[\frac{\text{с}^2}{\text{м}^3}\right].$$

Верная запись третьего закона Кеплера – 3 балла.
Верный вывод величины константы – 3 балла.
Верный расчет ее значения – 2 балла.
Арифметическая ошибка в расчете – минус 1 балл.

2 задание.

Искусственный спутник обращается вокруг Земли с периодом 120 минут по круговой орбите, лежащей в плоскости экватора Земли. Как часто можно наблюдать этот искусственный спутник в зените при наблюдении из определенной точки на экваторе Земли? (8 баллов)

Решение

Спутник совершает полный оборот вокруг Земли спутник за 120 минут. Полный оборот вокруг своей оси Земля совершает за звездные сутки, и это означает, что вокруг своей оси Земля вращается с угловой скоростью

$w = \frac{15^0}{1\text{ час}}$. За 120 минут Земля повернется вокруг своей оси на 30º и искусственному спутнику, чтобы вновь оказаться в зените потребуется пройти по своей орбите эти дополнительные 30º. Угловая скорость спутника $w = \frac{360^0}{120\text{ минут}} = \frac{3^0}{1\text{ минута}} = \frac{3^0}{m}$. Определим искомое время: $t = \frac{30^0}{3^0/m} = 10$ [минут]. Примерный период повторяемости прохождений спутника через зенит составит $120^m + 10^m = 130^m$.

Критерии оценивания.

Определение угловой скорости Земли в размерности $\left[\frac{\text{градус}}{\text{минута}}\right]$ – 2 балла.

Определение угловой скорости спутника в размерности $\left[\frac{\text{градус}}{\text{минута}}\right]$ – 2 балла.

Определение опережения Земли за это время – 2 балла.

Верное вычисление искомого периода прохождения спутника через зенит в определенной точке на экваторе – 2 балла.

3 задание (8 баллов).

Найдите отношение сил гравитационного взаимодействия (сил тяготения) Луна-Земля и Солнце-Земля ($\frac{F_{\text{Луна–Земля}}}{F_{\text{Солнце–Земля}}}$).

Приливы. Изобразите взаимное расположение Земли, Луны и Солнца для основных фаз Луны (новолуние, первая четверть, полнолуние и третья четверть) и положение приливных горбов.

Укажите в каких из этих положений величина приливов больше, а в каких меньше?

Решение

Сила гравитационного взаимодействия двух тел с массами M и m, находящихся на расстоянии R друг от друга, определяется законом тяготения Ньютона:

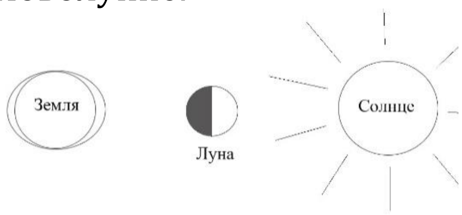
$$F = \frac{G \times M \times m}{R^2}$$

Таким образом, отношение сил взаимодействия Солнце-Земля и Луна-Земля равно

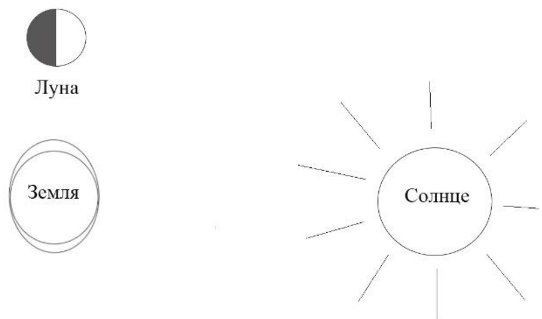
$$\frac{F_{\text{Солнце}-\text{Земля}}}{F_{\text{Луна}-\text{Земля}}} = \frac{M_{\text{Солнце}} \times m_{\text{Земля}} \times R^2_{\text{Луна}-\text{Земля}}}{R^2_{\text{Солнце}-\text{Земля}} \times M_{\text{Луна}} \times m_{\text{Земля}}}$$

$$\frac{F_{\text{Солнце}-\text{Земля}}}{F_{\text{Луна}-\text{Земля}}} = \frac{2 \times 10^{30} \times 14{,}8 \times 10^{16}}{2{,}24 \times 10^{22} \times 7{,}35 \times 10^{22}} = \frac{29{,}6 \times 10^{46}}{16{,}5 \times 10^{44}} = 179{,}4$$

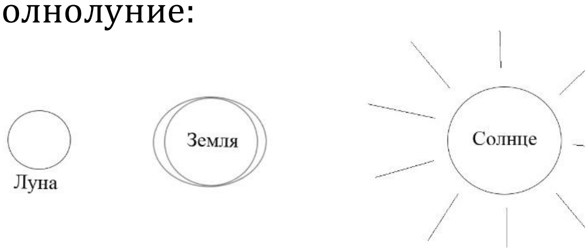
Новолуние:



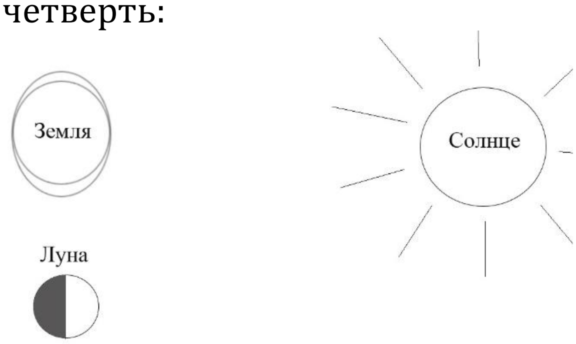
1 четверть:



Полнолуние:



3 четверть:



Величина приливов в положениях Луны «1 четверть» и «3 четверть» больше, чем в положениях «Новолуние» и «Полнолуние». Это связано с тем, что в положениях Луны «1 четверть» и «3 четверть» гравитационные влияния Солнца и Луны действуют по одной прямой (сизигийные приливы), а в положениях «Новолуние» и «Полнолуние» - в перпендикулярных направлениях (квадратурные приливы).

Критерии оценивания.

Правильная запись закона тяготения – 1 балл.

Верный расчет отношения сил гравитационного взаимодействия (сил тяготения) Луна-Земля и Солнце-Земля ($\frac{F_{\text{Луна}-\text{Земля}}}{F_{\text{Солнце}-\text{Земля}}}$) – 2 балла.

За каждое верное изображение приливов при различных фазах луны – по 1 баллу.

Правильный вывод о том, в каких положениях величина приливов больше – 1 балл.

4 Задание (8 баллов).

Предельное значение массы груза, который может перемещать транспортный робот при строительстве лунной базы равна 1275 кг. Собственная масса робота 1000 кг. Можно ли использовать этого робота при строительстве базы на Марсе? Ответ обоснуйте количественным расчетом.

Решение.

Вес робота на Луне при полной загрузке составляет:

$$P_{\text{Луна}} = \left(m_{\text{робота}} + m_{\text{груза}}^{\text{Луна}}\right) \times g_{\text{Луна}}$$

Вес робота при полной загрузке на Марсе составляет

$$P_{\text{Марс}} = \left(m_{\text{робота}} + m_{\text{груза}}^{\text{Марс}}\right) \times g_{\text{Марс}}$$

Приравнивая правые части этих соотношений, получаем

$$\left(m_{\text{робота}} + m_{\text{груза}}^{\text{Марс}}\right) = \left(m_{\text{робота}} + m_{\text{груза}}^{\text{Луна}}\right) \times \frac{g_{\text{Луна}}}{g_{\text{Марс}}}$$

Таким образом,

$$m_{\text{груза}}^{\text{Марс}} = \left(m_{\text{робота}} + m_{\text{груза}}^{\text{Луна}}\right) \times \frac{g_{\text{Луна}}}{g_{\text{Марс}}} - m_{\text{робота}}$$

Поскольку ускорение свободного падения на поверхности тела массой M и радиуса R равно

$$g = \frac{G \times M}{R^2}$$

Отношение ускорений свободного падения на Луне и Марс составляет:

$$\frac{g_{\text{Луна}}}{g_{\text{Марс}}} = \frac{M_{\text{Луна}} \times R_{\text{Марс}}^2}{R_{\text{Луна}}^2 \times M_{\text{Марс}}} = \frac{7{,}35 \times 10^{22} \times 11{,}56 \times 10^{12}}{3 \times 10^{12} \times 6{,}4 \times 10^{23}} = \frac{85}{192} = 0{,}44$$

Подставляя в полученное выше уравнение численные значения, находим

$$m_{\text{груза}}^{\text{Марс}} = (1000 + 1275) \times 0{,}44 - 1000 = 1001 - 1000 = 1\ [\text{кг}]$$

Вывод: для строительства марсианской базы данного робота использовать нецелесообразно, ввиду его малой грузоподъемности.

Критерии оценивания.

Верная запись выражений для веса груженого робота – 1 балл.

Верная запись для определения массы груза, перемещаемого на Марсе – 3 балла.

Верный расчет отношения ускорений свободного падения на Луне и Марсе – 2 балла.

Верный расчет значения массы груза, который робот может перемещать по поверхности Марса -1 балл.

Явным образом сформулированный вывод о нецелесообразности использования данного робота при строительстве базы на марсе – 1 балл.

Каждая арифметическая ошибка в расчетах – минус 1 балл.

5 задание (8 баллов).

В поясе астероидов был обнаружен объект с очень высоким альбедо (коэффициентом отражения), движущийся по круговой орбите относительно Солнца на расстоянии от него 1,34 а.е. со скоростью 29,5 км/с. Возникло подозрение, что этот объект – искусственного происхождения. Обоснуйте такую возможность на основе количественного анализа параметров его движения.

Решение.

Движение по круговой орбите естественного объекта Солнечной системы происходит с первой космической скоростью:

$$v_I = \sqrt{\frac{G \times M}{R}}\ ,$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса Солнца, R – радиус орбиты. Ее значение для указанного радиуса орбиты составляет:

$$v_I = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{1{,}34 \times 1{,}5 \times 10^{11}}} = 2{,}58 \times 10^{4} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$$

Таким образом, наблюдаемая скорость заметно превышает ту, которую имел бы объект естественного происхождения, движущийся по известным законам:

$$29{,}5 \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right] > 25{,}8 \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right]$$

Вывод: предположение о его искусственном происхождении (особенно в сочетании с необычно высоким альбедо) вполне обоснованно.

Критерии оценивания.

Верное выражение для первой космической скорости – 3 балла.

Верный расчет ее значения – 2 балла.

Верный логический вывод, содержащий ответ на поставленный в задаче вопрос – 3 балла.

Каждая арифметическая ошибка в расчетах – минус 1 балл.

6 Задание (8 баллов).

Два объекта в области пояса Койпера движутся по круговым орбитам относительно Солнца. Один расположен на расстоянии *r_1* = 34,2 а.е., а другой – на расстоянии *r_2* = 44,8 а.е. Какой из объектов движется быстрее и чему будет равна разница угловых расстояний между ними за 1 земной год?

Решение.

В соответствии с третьим законом Кеплера

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_1^2}{R_2^3} = \frac{T_{\text{Земли}}^2}{R_{\text{Земли}}^3} = 1 \left[\frac{\text{год}^2}{\text{а. е.}^3}\right]$$

Отсюда

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = 1 \rightarrow T_1 = \sqrt{R_1^3}$$

$$\frac{T_2^2}{R_2^3} = 1 \rightarrow T_2 = \sqrt{R_2^3}$$, т.е.

$$T_1 = \sqrt{34{,}2^3} = \sqrt{40001{,}69} = 200 \text{ [лет]}$$

$$T_2 = \sqrt{44{,}8^3} = \sqrt{89915{,}39} \approx 300 \text{ [лет]} .$$

Следовательно, за 1 год первый астероид проходит по орбите дугу

$$l_1 = \frac{360^0}{200} = 1{,}8^0$$

Второй астероид за 1 год проходит по орбите дугу

$$l_2 = \frac{360^0}{300} = 1{,}2^0$$

Следовательно, первый астероид движется быстрее, что, разумеется, совершенно естественно, поскольку располагается ближе к Солнцу.

Разница угловых расстояний между объектами за год составляет

$$\Delta l = 1{,}8^0 - 1{,}2^0 = 0{,}6^0$$

Критерии оценивания.

Верная запись 3 закона Кеплера – 3 балла.

Верный расчет периодов обращения указанных объектов в поясе Койпера – 3 балла.

Верный расчет разницы угловых расстояний между объектами за год – 3 балла.

Каждая арифметическая ошибка в расчетах – минус 1 балл.