Условия задач

1. 22 декабря в солнечный полдень наблюдатель, стоящий вертикально на ровной поверхности, обнаружил, что его тень имеет длину, равную его росту. На какой широте располагался наблюдатель?

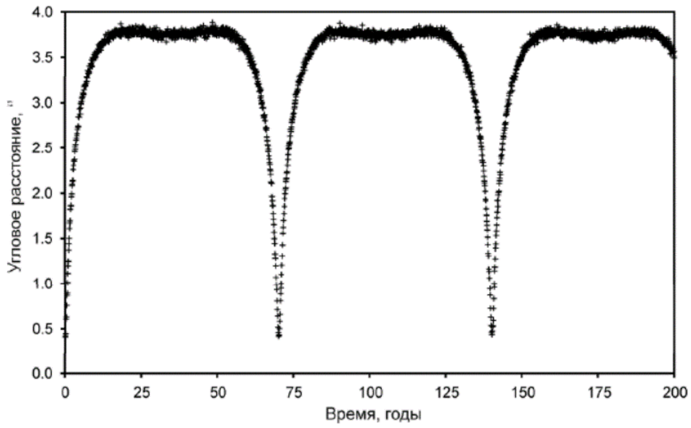
2. Средняя концентрация звезд в окрестностях Млечного Пути составляет 0,12шт/пк^3. Предположим, что вокруг каждой звезды вращается хотя бы одна планета, и на ней сидит наблюдатель. Сколько наблюдателей смогут открыть существование Юпитера в Солнечной Системе, зафиксировав его транзит по диску Солнца, если нас интересуют только наблюдатели, находящиеся на расстоянии не более 100 пк от Солнца? При решении задачи можно считать, что звезды равномерно распределены по объему.

3. На какой максимальной высоте h может кульминировать Луна в Саратове? Наклонение эклиптики к плоскости небесного экватора составляет $\varepsilon = 23{,}5^0$. Наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики $i = 5{,}1^0$. Географические координаты Саратова: $\varphi = 51{,}5^0$ с.ш., долгота $\lambda = 46{,}0^0$ в.д.

4. Определите эксцентриситет орбиты в двойной системе одинаковых солнцеподобных звезды, если выраженное в угловых секундах видимое угловое расстояние между ними меняется так, как показано на графике.

5. Вычислите массу (в массах Солнца) каждой из звезд, входящих в состав такой двойной звезды, у которой параллакс 0,5”, период обращения 80 лет, большая полуось орбиты видна с Земли под углом 18”, а звезды отстоят от центра масс на расстояниях, относящихся как 3:1.

6. Во сколько раз изменится радиус цефеиды, если амплитуда изменения ее блеска равна $1{,}5^m$, а яркость единицы ее поверхности остается постоянной?



К задаче 4

Решения

1. Равенство длины тени и роста человека возможно только при высоте Солнца над горизонтом 45° *(2 балла)*. Так как наблюдение по условию проводится в полдень, то очевидно, что Солнце находится в своей кульминации (1 балл).

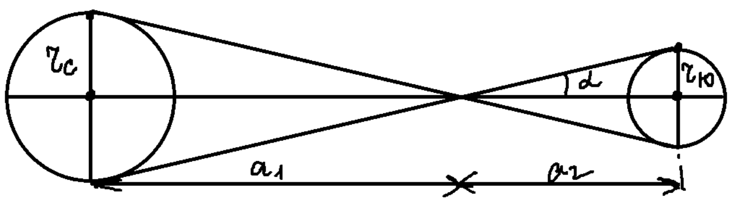
Если Солнце кульминирует к югу от зенита (широта местности φ больше склонения Солнца δ), то высота $h = 90° - \varphi + \delta$ *(1 балл)*

Если Солнце кульминирует к северу от зенита (широта местности φ меньше склонения Солнца δ), то высота $h = 90° + \varphi - \delta$ *(1 балл)*

Таким образом $\varphi = \delta \pm (90° - h)$, где $\delta = -23{,}5°$ – склонение Солнца в день зимнего солнцестояния *(1 балл)*

Тогда $\varphi = 21{,}5°\,\text{с. ш.}$ либо $\varphi = -68{,}5°\,\text{ю. ш.}$ *(по 1 баллу за каждый вариант)*

2.



$S=a_1+a_2$ – расстояние от Солнца до Юпитера, $r_ю$ и $r_с$ – радиусы Юпитера и Солнца соответственно.

$r_ю = a_2\ tg\ \alpha$, $r_с = a_1\ tg\ \alpha$

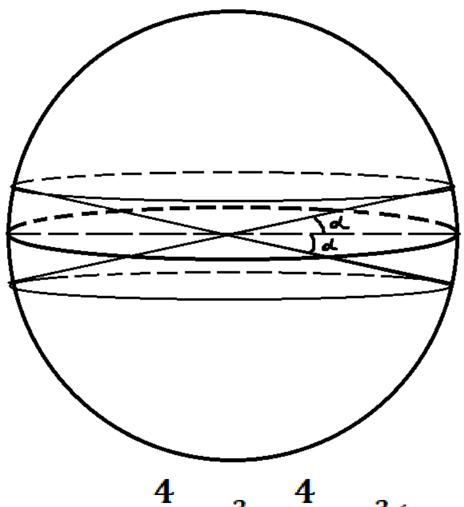
$a_1 = a_2\ r_с / r_ю$

$S = a_2\ (1 + r_с / r_ю)$

$a_2 = S / (1 + r_с / r_ю)$,

тогда $tg\ \alpha = (1 + r_с / r_ю)\ r_ю / S$.

2α – угол зрения в пределах которого можно наблюдать транзит Юпитера по Солнцу *(за определение угла α - 3 балла)*



Тогда искомые наблюдатели располагаются внутри объема пространства (V) равного разности между объемом шара радиусом R=100 пк и двух шаровых секторов (см рис.). Размерами Солнечной системы и расстоянием от Солнца до Юпитера по сравнению с расстоянием в 100 пк пренебрежем.

$V_ш = 4\ \pi\ R^3/3$

$$\boldsymbol{V_{\text{ш.сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos(90° - \alpha)) = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \sin\alpha)}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3(1 - \sin\alpha) = \frac{4}{3}\pi R^3 sin\alpha}$$

$\boldsymbol{sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha}$ для малых углов

Тогда

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3(1 + r_с / r_ю)\, r_ю / S}$$

(за определение объема искомой области - 3 балла)

Тогда искомое количество наблюдателей составляет:

$N = cV$, где с – концентрация планет

N$\approx$ **50** *(за определение количества наблюдателей - 2 балла)*

3. Максимальная высота в кульминации будет в тот момент, когда у Луны максимальное склонение *(2 балла)*, равное $\delta = \varepsilon + i = 28{,}6°$*(2 балла)*. Максимальная высота луны в верхней кульминации составит $h = 90° - \varphi + \delta$ *(2 балла)* = 67,1° *(2 балла)*.

4. Зависимость углового расстояния между звездами характеризуется резкими минимумами, между которыми эта величина практически постоянна. Такая зависимость больше похожа на кривую блеска затменной переменной *(2 балла)*. Если же говорить об угловом расстоянии, то начать следует с вывода о том, что орбиты звезд в системе явно не круговые.

Будем считать одну из звезд неподвижной, рассматривая движение второй звезды относительно первой. Очевидно, это не меняет форму орбиты. Будь эта орбита круговой, пусть даже и наклоненной к лучу зрения, в проекции на небесную сферу она представлялась бы эллипсом с центром, совпадающим с положением звезды, которую мы считаем неподвижной. В этом случае угловая зависимость имела два одинаковых максимума и два одинаковых минимума по ходу орбитального периода, что не соответствует условию. *(2 балла)*

Рассмотрим теперь случай эллиптических орбит. На картине мы видим острый минимум, а вся зависимость симметрична относительно этого минимума. Такое может быть, если этот минимум соответствует перицентру орбиты звезды.

В момент перицентра угловое расстояние между звездами составляет $\rho_P=0.4''$. В апоцентре звезда оказывается через половину периода, и тогда угловое расстояние равно $\rho_A=3.75''$. *(2 балла)*

Неподвижная звезда, перицентр и апоцентр находятся в пространстве на одной прямой, поэтому вне зависимости от ориентации орбиты эти видимые расстояния относятся друг к другу так же, как и пространственные расстояния в перицентре и апоцентре. Отсюда мы получаем эксцентриситет орбиты:

$$e = \frac{\rho_A - \rho_P}{\rho_A + \rho_P} = 0.8$$ *(2 балла)*.

5. Пусть $\pi = 0{,}5''$ – параллакс двойной звезды. Тогда расстояние до нее можно найти по формуле: $r = 1/\pi = 2$ парсека *(1 балл)*. Зная расстояние до звезды и видимый угловой размер большой полуоси можно найти реальный размер большой полуоси орбиты: $a = r\,\alpha = 2$ парсека $\cdot$ 18'' = 36 а.е. *(2 балла)*.

Воспользуемся обобщенным третьим законом Кеплера, чтобы найти сумму масс компонент двойной звезды. Двойную звезду будем рассматривать в сравнении с системой Земля-Солнце.

$(T_з)\ 2\ (M_c + m_з) / (T_2 \cdot (m_1 + m_2)) = (a_з)^3 / a^3$. (1) (2 балла)

Массой Земли по сравнению с массой Солнца можно пренебречь.

$T_з = 1$ год, $a_з = 1$ а.е. Тогда: $m_1 + m_2 = a\ {}^3M_c/T_2 = 7{,}29M_c$. *(1 балл)* Для двойных звезд:

$m_1r_1 = m_2r_2$, тогда $m_2 = 3m_1$. Отсюда: $m_1 = 1{,}82$ массы Солнца, $m_2 = 5{,}47$ массы Солнца *(2 балла)*.

6. По условию задачи поверхностная яркость (и эффективная температура) цефеиды остается постоянной, и блеск изменяется только за счет изменений её пространственных и видимых размеров. В этом случае справедлива формула: $\Delta m = 5 \lg R_2/R_1$ *(3 балла)*, где R_1 и R_2 – радиусы цефеиды в минимуме и максимуме блеска *(2 балла)*. Подставляя числовое значение величины Δm, получаем, что в максимуме цефеида имеет в 2 раза *(3 балла)* больший радиус, чем в минимуме.