8 класс

1. Ответ: 6

Решение. Сумма делителей включает само число и единицу, поэтому сумма оставшихся делителей равна 5, 5=2+3, значит это число 6.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. Правильно составлено уравнение, позволяющее определить сумму делителей кроме 1 и самого числа – 2 балла.

2. Ответ: Такое могло быть.

Решение: Для обоснования необходимо привести пример.

Пусть сумму a Маша зарабатывала, а сумму b тратила. Тогда расстановка этих сумм по месяцам может быть следующая: a, b, b, b, b, a, b, b, b, b, a, b. Причем 4b>a и 3a>9b. Неравенствам удовлетворяет решение a=3,5, b=1.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Указан только верный ответ (без объяснения) – 0 баллов.

Приведен подходящий пример (может быть без описания способа его отыскания) – 7 баллов.

3. Ответ: $(x^4+1-x^2)(x^2+x+1)$

Решение.

$$\frac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=\frac{x^8+2x^4+1-x^4}{x^2+x+1}=\frac{(x^4+1)^2-x^4}{x^2+x+1}=\frac{(x^4+1-x^2)(x^4+1+x^2)}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{(x^4+1-x^2)(x^4+1+2x^2-x^2)}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{(x^4+1-x^2)(x^2+x+1)(x^2+x-1)}{x^2+x+1}=(x^4+1-x^2)(x^2+x+1)$$

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки 4 балла. Решение начато и удалось разложить на множители числитель или знаменатель 1 балл.

4. Решение: 1 способ $x-a\{x\}=[x]+1$

$$x-a(x-[x])=[x]+1$$

$$x(1-a)=[x](1-a)+1$$

$a\neq 1$, иначе последнее равенство неверно. Поэтому разделим обе части уравнения на $(1-a)$. Получим

$$x=[x]+\frac{1}{1-a}$$

Так как $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x, то $0\le\frac{1}{1-a}<1$.

Если a положительно и меньше 1, то $\frac{1}{1-a}>1$.

Если a положительно и больше 1, то $\frac{1}{1-a}<0$.

2 способ При любом положительном a $x-a\{x\}<[x]+1$, так как $x-a\{x\}\le\ x<[x]+1$, поскольку $\{x\}\ge 0$ при любом x.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верно выполнены преобразования и получено, что $0\le\frac{1}{1-a}<1$ - 5 баллов.

Также получен верный вывод о значениях $\frac{1}{1-a}$ при положительных a – 7 баллов.

Для 2-го способа решения существенным является использование утверждений $\{x\}\ge 0$ при любом x и $x<[x]+1$ при любом x.

Необоснованная оценка $x-a\{x\}<[x]+1$ - 1 балл.

5. Решение:

Четную кучку можно разделить на две четные или две нечетные кучки. Нечетную кучку можно разделить только на четную и нечетную кучки. Стратегия состоит в том, чтобы оставлять сопернику две нечетные кучки.

Соперник сможет своим ходом оставить только четную и нечетную кучки. Игрок, обладающий выигрышной стратегией, выбрасывает нечетную кучку, а четную делить на две нечетные. Таким образом, соперник будет подведен к ситуации: в каждой кучке по 1 камушку.

Поскольку игра начинается с двух четных кучек, то выигрывает первый игрок. Первым своим ходом он любую из этих кучек выбрасывает, а вторую делить на четную и нечетную кучки.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Указано, что выигрывает второй – 0 баллов.

Только ответ, что выигрывает первый – 0 баллов.

Верный ответ с описанием верной выигрышной стратегии, но без ее доказательства – 5 баллов.