Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант 10-1

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 3 м/с модель Альфа продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Бета, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. На бумажном правильном треугольнике со стороной 45 отметили 2023 красных точки. Можно ли на этом треугольнике разместить два правильных треугольника со стороной 1, не имеющих общих внутренних точек, так, чтобы внутри каждого из них не было ни одной красной точки?

3. Найдите $f(2024)$, если $f(x)=|2x-1|-|2x-3|+6$ при $x\in[0;2]$ и, кроме того, при всех целых значениях x

$$\begin{cases} f(x+3)\le f(x)+6, \\ f(x+2)\ge f(x)+4. \end{cases}$$

4. В остроугольном треугольнике LOM обозначили точку пересечения высот через H, центр описанной окружности через Q. Площади треугольников LQH и OQH равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника MQH.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2[\mathrm{tg}\ a]-1|^x=[\mathrm{tg}\ a]^2+2$$

имеет рациональное решение x. Здесь, $[t]$ – целая часть числа t.

Апрель 2024 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант 10-2

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 4 м/с модель А-1 продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Б-2, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. На бумажном правильном треугольнике со стороной 45 отметили 2022 синих точки. Можно ли на этом треугольнике разместить три правильных треугольника со стороной 1, не имеющих общих внутренних точек, так, чтобы внутри каждого из них не было ни одной синей точки?

3. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |3x - 2| - |3x - 4| + 5$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях x

$$\begin{cases} f(x+3) - 6 \le f(x), \\ f(x+2) - 4 \ge f(x). \end{cases}$$

4. В остроугольном треугольнике ABC обозначили точку пересечения высот через H, центр описанной окружности через O. Площади треугольников AOH и BOH равны 15 и 8 соответственно. Найдите площадь треугольника COH.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{ctg} a] - 1|^x = [\operatorname{ctg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x. Здесь, $[t]$ – целая часть числа t.

Апрель 2024 г.

Ответы и решения

1-1. Ответ: модель Альфа, на 50 м.

Решение. Решим задачу в общем виде. В условии заданы: u м/с – скорость ветра; модель Альфа продержалась в воздухе на t секунд меньше модели Бета; модель Альфа пролетела на l метров дальше.

Пусть v_1 и v_2 — скорости при безветренной погоде моделей Альфа и Бета соответственно (в м/с), t_1 и t_2 время (в секундах), которое первая и вторая модели соответственно продержались в воздухе.

Тогда при встречном ветре $(v_1 - u)t_1$ — дальность полета модели Альфа, $(v_2 - u)t_2$ — дальность полета модели Бета. По условию:

$$t = t_2 - t_1, \qquad l = (v_1 - u)t_1 - (v_2 - u)t_2 = v_1t_1 - v_2t_2 + ut.$$

При безветренной погоде разность между дальностью полета первой и второй моделей равна

$$x = v_1t_1 - v_2t_2 = l - ut.$$

Таким образом, $x > 0,$ если $l > ut$; $x < 0,$ если $l < ut$; $x = 0,$ если $l = ut$.

При $u = 3$, $t = 150$ и $l = 500$ получаем $x = 500 - 450 = 50 > 0$. Таким образом, модель Альфа пролетит дальше на 50 метров.

1-2. Ответ: модель Б-2, на 100 м.

2-1. Ответ: Можно.

Решение. Проведя $3 \cdot 44 = 132$ прямых, параллельных сторонам исходного треугольника, разобьем бумажный треугольник на $45^2 = 2025$ правильных треугольников со стороной 1. Так как отмечено 2023 точки, то существует, как минимум, два треугольника, на которых точек нет (принцип Дирихле).

2-2. Ответ: Можно.

3-1. Ответ: 4052.

Решение. Отметим, что $f(0) = 4, f(1) = 6, f(2) = 8$.

По условию, с одной стороны,

$$f(x + 6) \leq f(x + 3) + 6 \leq f(x) + 12,$$

а, с другой стороны,

$$f(x + 6) \geq f(x + 4) + 4 \geq f(x + 2) + 8 \geq f(x) + 12.$$

Поэтому $f(x+6) = f(x) + 12$ и, более того, все неравенства выше обращаются в равенства.
Поэтому $f(x+3) = f(x) + 6$, $f(x+2) = f(x) + 4$ и $f(x+1) = f(x) + 2$.
Таким образом, искомая функция – это функция $f(x) = 4 + 2x$ при целых значениях x.

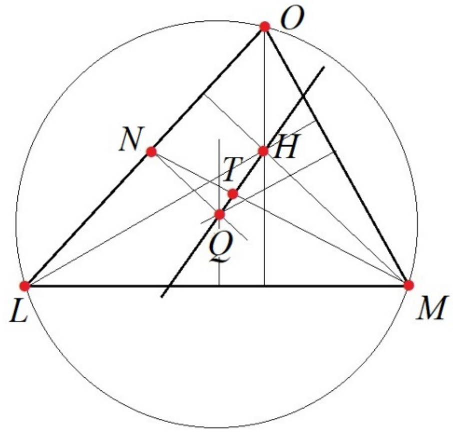
Кроме этого, известны значения функции на отрезке $[0; 2]$.

Значит, $f(2024) = 4 + 2024 \cdot 2 = 4052$.

3-2. Ответ: 4051.

4-1. Ответ: 8 или 2.

Решение. В точке *H* пересекаются три высоты треугольника. Так как *Q* – центр описанной окружности, то в точке *Q* пересекаются серединные перпендикуляры треугольника. Так как точка *N* – середина стороны *LO*, то *MN* – медиана. Точка *T* – точка пересечения медианы и прямой *HQ*.



Треугольника *NQT* и *MHT* подобны (следует из параллельности прямых *NQ* и *HM*, которые обе перпендикулярны прямой *LO*). Так как $HM = 2 \cdot NQ$ (это простой факт из школьной геометрии), то коэффициент подобия равен 2. Значит, $MT : TN = 2 : 1$, то есть медиана *MN* делится точкой *T* в отношении 2 : 1. Это означает, что *T* – точка пересечения медиан треугольника *LOM*.

Поэтому площадь ΔMQH в 2 раза больше площади ΔNQH. Так как *N* – середина *LO*, то

$$S_{\Delta NQH} = \frac{S_{\Delta LQH} + S_{\Delta OQH}}{2} \Rightarrow S_{\Delta MQH} = S_{\Delta LQH} + S_{\Delta OQH}.$$

Но здесь ошибкой был бы вывод о том, что, значит, $S_{\Delta MQH} = 5 + 3 = 8$. Дело в том, что выше доказано, что одна из этих трех площадей является суммой двух других. Но какая именно, зависит от рисунка, который мы сделаем. Важно, где прямая *QH* пересекает стороны треугольника. Если треугольник *LOM* правильный, то точки *Q* и *H* совпадают и указанные в условии задачи три площади вырождаются (это здесь невозможно, так как дано, что площади равны 3 и 5). Если прямая *QH* проходит через любую вершину треугольника, то тогда одна из трех площадей равна 0, а две другие – ненулевые, но равны между собой (тоже не наш случай). Если же прямая *QH* пересекает две стороны (рассмотренный выше случай), то мы доказали, что одна из этих трех площадей (в одном случае это *MQH*, в другом – *LQH*, в третьем – *OQH*) является суммой двух других.

Поэтому получаем либо 5 + 3 = x (то есть x = 8), либо 3 + x = 5 (то есть x = 2), либо 5 + x = 3 (что невозможно).

4-2. Ответ: 23 или 7.

5-1. Ответ: $a \in [-\pi/4 + \pi n; \pi n) \cup [\operatorname{arctg} 5 + \pi n; \operatorname{arctg} 6 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Положим $b = [\operatorname{tg} a]$. Тогда уравнение принимает вид $(|2b-1|)^x = b^2 + 2$, $b \in \mathbb{Z}$. Нужно найти все целочисленные значения b, при которых существует рациональное решение x.

При $b = 0$ решений нет. Рассмотрим вначале случай $b > 0$, т.е. $b \in \mathbb{N}$. Тогда поскольку при любом натуральном b

$$b^2 + 2 > 2b - 1 \geq 1,$$

то можем считать, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные. Значит, числа $b^2 + 2$ и $2b - 1$ имеют одни и те же простые делители.

Пусть $p -$ общий простой делитель этих чисел, тогда

$$\begin{cases} b^2 + 2 = pN, \\ 2b - 1 = pM, \end{cases}$$

где N и $M -$ натуральные. Исключая b из левых частей уравнений этой системы, получаем

$$9 = 4(b^2 + 2) - (2b - 1)(2b + 1) = (4N - (2b + 1)M)p.$$

Значит $(4N - (2b + 1)M) -$ натуральное, а $p -$делитель 9, т.е. $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} b^2 + 2 = p^m, \\ 2b - 1 = p^k, \end{cases}$$

где m и $k -$ натуральные и $m > k$.

Так как

$$9 = 4(b^2 + 2) - (2b - 1)(2b + 1) = 4 \cdot 3^m - (3^k + 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2),$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2$ не делится на 3, то $k = 2$ и $m = 3, b = 5, x = \frac{3}{2}$.

Для отрицательных b решение проводится почти аналогично. Положим $c = -b$. Тогда исходное уравнение будет записываться в виде:

$$(2c + 1)^x = c^2 + 2, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Случай $c = 1$ очевиден, поскольку решение $x = 1$. Пусть $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$. Аналогично предыдущему показывается, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные. Опять предположив, что $p -$ общий простой делитель этих чисел, получим

$$\begin{cases} c^2 + 2 = pN, \\ 2c + 1 = pM, \end{cases}$$

и также сделаем вывод, что $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} c^2 + 2 = 3^m, \\ 2c + 1 = 3^k, \end{cases}$$

где m и $k -$ натуральные и $m > k$.

Так как

$$9 = 4(c^2 + 2) - (2c - 1)(2c + 1) = 4 \cdot 3^m - (3^k - 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k + 2),$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k + 2$ не делится на 3, то $k = 2$ и $4 \cdot 3^{m-2} - 3^2 + 2 = 1$ или $4 \cdot 3^{m-2} = 8$, но последнее уравнение не имеет натуральных решений. Поэтому все решения описываются уравнениями: $[\operatorname{tg} a] = -1$ и $[\operatorname{tg} a] = 5$, решив которые приходим к ответу.

5-2. Ответ: $a \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right] \cup (\operatorname{arcctg} 6 + \pi n; \operatorname{arctg} 5 + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.