ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ – 2023-24. МАТЕМАТИКА.

Критерии проверки. 11 класс

Каждая из шести задач оценивается в 20 баллов. Максимальная оценка = 100 баллов.

Участники, набравшие 100 или больше 100 баллов, получают оценку 100.

В каждой из задач за различные недостатки (ошибки в логике, пропущенные переходы, недостатки обоснований, ошибки и т. д.), могло быть снято от 5 до 20 баллов.

Кроме этого, некоторые стандартные ошибки описаны ниже.

Задача № 1 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Ответ неверен, но при этом получено правильное уравнение или правильная система уравнений	$\pm$	15

Задача № 2 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Сделан верный и обоснованный переход от неравенств к равенствам. Ответ при этом неверен	$\pm$	15
Переход от неравенств к равенствам верный, но его обоснование содержит ошибки или вообще отсутствует. При этом получен верный ответ	$\pm$	15
Переход от неравенств к равенствам верный, но его обоснование содержит ошибки или вообще отсутствует. При этом ответ неверный или не получен	$\mp$	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Идейно верное решение уравнения, верно найдены корни. Сумма корней на отрезке найдена верно, но при этом имеются дефекты в обоснованиях расположения корней	$\pm$	15
Идейно верное решение уравнения, верно найдены корни. Сумма корней на отрезке найдена неверно из-за вычислительных ошибок	$\pm$	15
Идейно верное решение уравнения, но имеются дефекты в обосновании поиска корней. При этом корни найдены верно и верно (и обоснованно) найдена сумма корней на отрезке	$\pm$	15
Идейно верное решение уравнения, верно найдены корни. Сумма корней на отрезке не найдена или найдена неверно	$+/2$	10
Идейно верное решение уравнения, но имеются дефекты в обосновании поиска корней и неверно найдены корни	$\mp$	5

Задача № 4 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Идейно верное решение, но имеются дефекты в доказательстве. При этом получены оба правильных ответа.	$\pm$	15
Использован правильный способ решения (с доказательством), но получен только один ответ	$+/2$	10
Рассмотрен частный случай, получен один правильный ответ	$+/2$	10

Задача № 5 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании тех или иных фактов. Получен правильный ответ.	$\pm$	15
Идейно верное решение, ответ неверен из-за вычислительной ошибки	$\pm$	15
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании тех или иных фактов. Ответ неверен из-за вычислительной ошибки	$\mp$	5

Задача № 6 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании тех или иных фактов. Получен правильный ответ.	$\pm$	15
При идейно правильном решении допущены вычислительные ошибки	$\pm$	15
Идейно верное решение, но имеются дефекты в обосновании тех или иных фактов. Ответ неверен из-за вычислительной ошибки	$\mp$	5

Критерии уточняются по ходу проверки!

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-1

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 3 м/с модель Альфа продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Бета, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |2x-1| - |2x-3| + 6$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях *x* выполняются неравенства

$$f(x+3) \leq f(x)+6 \quad \text{и} \quad f(x+2) \geq f(x)+4.$$

3. Решите уравнение

$$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике *PVG* обозначили точку пересечения высот через *H*, центр описанной окружности через *O*. Площади треугольников *OHP* и *OHV* равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника *OHG*.

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось *Ox* прямоугольной декартовой системы координат в точках *A* и *B*, а ось *Oy* – в точке *C* (все три точки различны). Известно, что точка *D* равноудалена от точек *A*, *B* и *C*, а сумма ее координат равна (-2023). Найдите минимально возможную при данных условиях длину отрезка *AB*.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2[\text{tg } a]-1|^x = [\text{tg } a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x. Здесь, $[t]$ – целая часть числа *t*.

Апрель 2024 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-2

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 4 м/с модель А-1 продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Б-2, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |3x-2| - |3x-4| + 5$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях *x* выполняются неравенства

$$f(x+3) - 6 \leq f(x) \quad \text{и} \quad f(x+2) - 4 \geq f(x).$$

3. Решите уравнение

$$36 \sin(x + \sin x) \sin(x - \sin x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике *ABC* обозначили точку пересечения высот через *H*, центр описанной окружности через *O*. Площади треугольников *AOH* и *BOH* равны 15 и 8 соответственно. Найдите площадь треугольника *COH*.

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось *Ox* прямоугольной декартовой системы координат в точках *A* и *B*, а ось *Oy* – в точке *C* (все три точки различны). Известно, что точка *D* равноудалена от точек *A*, *B* и *C*, а сумма квадратов ее координат равна 2021. Найдите максимально возможную при данных условиях длину отрезка *AB*.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{ctg} a] - 1|^x = [\operatorname{ctg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x. Здесь, $[t]$ – целая часть числа t.

Апрель 2024 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-3

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 3 м/с модель Альфа продержалась в воздухе на 300 секунд меньше модели Бета, но пролетела на 700 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |2x+3| - |2x+1| + 4$ при $x \in [-2; 0]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x+3) \le f(x) + 6 \quad \text{и} \quad f(x+2) \ge f(x) + 4.$$

3. Решите уравнение

$$36\cos(x + \cos x)\cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике PVG обозначили точку пересечения высот через H, центр описанной окружности через O. Площади треугольников OHP и OHV равны 25 и 13 соответственно. Найдите площадь треугольника OHG.

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B, а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A, B и C, а сумма ее координат равна (-2022). Найдите минимально возможную при данных условиях длину отрезка AB.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{tg} a] + 1|^x = [\operatorname{tg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x. Здесь, $[t]$ – целая часть числа t.

Апрель 2024 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-4

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 2 м/с модель А-1 продержалась в воздухе на 400 секунд меньше модели Б-2, но пролетела на 900 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |3x+4| - |3x+2| + 7$ при $x \in [-2; 0]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x+3) - 6 \leq f(x) \quad \text{и} \quad f(x+2) - 4 \geq f(x).$$

3. Решите уравнение

$$36\sin(x + \sin x)\sin(x - \sin x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике ABC обозначили точку пересечения высот через H, центр описанной окружности через O. Площади треугольников AOH и BOH равны 9 и 5 соответственно. Найдите площадь треугольника COH.

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B, а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A, B и C, а сумма квадратов ее координат равна 2021. Найдите максимально возможную при данных условиях длину отрезка AB.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{ctg} a] + 1|^x = [\operatorname{ctg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x. Здесь, $[t]$ – целая часть числа t.

Апрель 2024 г.

Ответы и решения

1-1. Ответ: модель Альфа, на 50 м.

Решение. Решим задачу в общем виде. В условии заданы: u м/с – скорость ветра; модель Альфа продержалась в воздухе на t секунд меньше модели Бета; модель Альфа пролетела на l метров дальше.

Пусть v_1 и v_2 – скорости при безветренной погоде моделей Альфа и Бета соответственно (в м/с), t_1 и t_2 – время (в секундах), которое первая и вторая модели соответственно продержались в воздухе.

Тогда при встречном ветре $(v_1 - u)t_1$ – дальность полета модели Альфа, $(v_2 - u)t_2$ – дальность полета модели Бета. По условию:

$$t = t_2 - t_1, \qquad l = (v_1 - u)t_1 - (v_2 - u)t_2 = v_1t_1 - v_2t_2 + ut.$$

При безветренной погоде разность между дальностью полета первой и второй моделей равна

$$x = v_1t_1 - v_2t_2 = l - ut.$$

Таким образом, $x > 0,$ если $l > ut$; $x < 0,$ если $l < ut$; $x = 0,$ если $l = ut$.

При $u = 3$, $t = 150$ и $l = 500$ получаем $x = 500 - 450 = 50 > 0$. Значит, модель Альфа пролетит дальше на 50 метров.

1-2. Ответ: модель Б-2, на 100 м.

1-3. Ответ: модель Бета, на 200 м.

1-4. Ответ: А-1, на 100 м.

2-1. Ответ: 4052.

Решение. Отметим, что $f(0) = 4, f(1) = 6, f(2) = 8$.

По условию, с одной стороны,

$$f(x+6) \le f(x+3) + 6 \le f(x) + 12,$$

а, с другой стороны,

$$f(x+6) \ge f(x+4) + 4 \ge f(x+2) + 8 \ge f(x) + 12.$$

Поэтому $f(x+6) = f(x) + 12$ и, более того, все неравенства выше обращаются в равенства.

Поэтому $f(x+3) = f(x) + 6$, $f(x+2) = f(x) + 4$ и $f(x+1) = f(x) + 2$.

Таким образом, искомая функция – это функция $f(x) = 4 + 2x$ при целых значениях x.

Кроме этого, известны значения функции на отрезке $[0; 2]$.

Значит, $f(2024) = 4 + 2024 \cdot 2 = 4052$.

2-2. Ответ: 4051.

2-3. Ответ: 4054.

2-4. Ответ: 4057.

3-1. Ответ: $x = \pm\arccos\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathcal{Z}$. Сумма корней равна $4\pi - \arccos\frac{\pi}{6}$.

Решение. Пользуясь формулами преобразования произведения в сумму, получаем

$$\cos 2x + \cos(2\cos x) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}.$$

Пусть $t = \cos x$, тогда левая часть уравнения равна $f(t) = 2t^2 - 1 + \cos 2t$. Функция f возрастает на $[0; 1]$ (так как $f'(t) = 2(2t - \sin 2t) > 0$ при $t > 0$) и является чётной, причём $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$. Следовательно, корнями уравнения $f(t) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$ на отрезке $[-1; 1]$ являются числа $t = \pm\frac{\pi}{6}$. Возвращаясь к переменной x, находим $x = \pm\arccos\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathcal{Z}$.

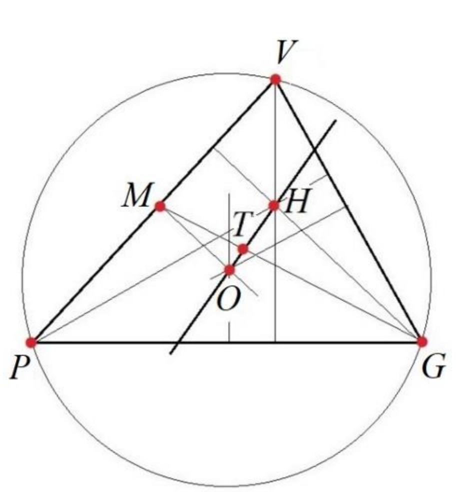
Так как $\frac{\pi}{4} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} < \arccos\frac{\pi}{6} < \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, то на указанный отрезок попадают корни $\pi - \arccos\frac{\pi}{6}$, $\pi + \arccos\frac{\pi}{6}$ и $2\pi - \arccos\frac{\pi}{6}$. Их сумма равна $4\pi - \arccos\frac{\pi}{6}$.

3-2. Ответ: $x = \pm\arcsin\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathcal{Z}$. Сумма корней равна $4\pi - \arcsin\frac{\pi}{6}$.

3-3. Ответ: $x = \pm\arccos\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathcal{Z}$. Сумма корней равна $2\pi + \arccos\frac{\pi}{6}$.

3-4. Ответ: $x = \pm\arcsin\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathcal{Z}$. Сумма корней равна $2\pi + \arcsin\frac{\pi}{6}$.

4-1. Ответ: 8 или 2.



Решение. В точке *H* пересекаются три высоты треугольника. Так как *O* – центр описанной окружности, то в точке *O* пересекаются серединные перпендикуляры треугольника. Пусть точка *M* – середина стороны *PV*, тогда *GM* – медиана. Точка *T* – точка пересечения медианы и прямой *OH*.

Треугольника *MOT* и *GHT* подобны (следует из параллельности прямых *MO* и *HG*, которые обе перпендикулярны прямой *PV*). Так как $HG = 2 \cdot MO$ (это факт из школьной геометрии), то коэффициент подобия равен 2. Значит, $GT : TM = 2 : 1$, то есть медиана GM делится точкой T в отношении 2 : 1. Это означает, что T – точка пересечения медиан треугольника PVG.

Поэтому площадь ΔOHG в 2 раза больше площади ΔOHM. Так как M – середина PV, то

$$S_{\Delta OHM} = \frac{S_{\Delta OHP} + S_{\Delta OHV}}{2} \Rightarrow S_{\Delta OHG} = S_{\Delta OHP} + S_{\Delta OHV}.$$

Но здесь ошибкой был бы вывод о том, что, значит, $S_{\Delta OHG} = 5 + 3 = 8$. Дело в том, что выше доказано, что одна из этих трех площадей является суммой двух других. Но какая именно, зависит от рисунка, который мы сделаем. Важно, где прямая OH пересекает стороны треугольника. Если треугольник PVG правильный, то точки O и H совпадают и указанные в условии задачи три площади вырождаются (это здесь невозможно, так как дано, что площади равны 3 и 5). Если прямая OH проходит через любую вершину треугольника, то тогда одна из трех площадей равна 0, а две другие – ненулевые, но равны между собой (тоже не наш случай). Если же прямая OH пересекает две стороны (рассмотренный выше случай), то мы доказали, что одна из этих трех площадей (в одном случае это OHG, в другом – OHP, в третьем – OHV) является суммой двух других.

Поэтому получаем либо $5 + 3 = x$ (то есть $x = 8$), либо $3 + x = 5$ (то есть $x = 2$), либо $5 + x = 3$ (что невозможно).

4-2. Ответ: 23 или 7.

4-3. Ответ: 38 или 12.

4-4. Ответ: 14 или 4.

5-1. Ответ: $2\sqrt{4046} = 34\sqrt{14}$. Решение. Из условия вытекает, что $q \neq 0$. Если обозначить $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$, $C(0;q)$, $D(x;y)$, то, очевидно, что $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Далее $|DB|^2 = |DC|^2$ $\Leftrightarrow$ $(x - x_2)^2 + y^2 = x^2 + (y - q)^2$ $\Leftrightarrow$ $2qy = q^2 + 2xx_2 - x_2^2$. Так как $2x = x_1 + x_2$, то $2qy = q^2 + x_1 x_2$. Поэтому с учетом теоремы Виета: $x = -\frac{p}{2}$, $y = \frac{q+1}{2}$.

Тогда из условия задачи имеем уравнение $q - p = 2 \cdot (-2023) - 1 = -4047$. По формуле корней квадратного уравнения, $|AB| = |x_2 - x_1| = \sqrt{D} = \sqrt{p^2 - 4q}$, откуда следует $|AB|^2 = p^2 - 4q = p^2 - 4p + 4 \cdot 4047 = (p - 2)^2 + 4 \cdot 4046 \geq 4 \cdot 4046$.

Данное значение $|AB| = 2\sqrt{4046} = 34\sqrt{14}$ достигается при $p = 2$, $q = -4045$.

5-2. Ответ: $2\sqrt{2023} = 34\sqrt{7}$ (достигается при $p = \pm 4\sqrt{505}$ $q = -3$). Здесь

$$p^2 + (q+1)^2 = 4 \cdot 2021,$$

$$|AB|^2 = p^2 - 4q = 4 \cdot 2021 - (q+1)^2 - 4q = 4 \cdot 2021 + 8 - (q+3)^2 \le 4 \cdot 2023.$$

5-3. Ответ: $4\sqrt{1011}$.

5-4. Ответ: $2\sqrt{2023} = 34\sqrt{7}$.

6-1. Ответ: $a \in [-\pi/4 + \pi n; \pi n) \cup [\operatorname{arctg} 5 + \pi n; \operatorname{arctg} 6 + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Положим $b = [\operatorname{tg} a]$. Тогда уравнение принимает вид $(|2b-1|)^x = b^2 + 2, b \in \mathbb{Z}$.

Нужно найти все целочисленные значения b, при которых существует рациональное решение x.

При $b = 0$ решений нет. Рассмотрим вначале случай $b > 0$, т.е. $b \in \mathbb{N}$. Тогда поскольку при любом натуральном b

$$b^2 + 2 > 2b - 1 \ge 1,$$

то можем считать, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные. Значит, числа $b^2 + 2$ и $2b - 1$ имеют одни и те же простые делители.

Пусть $p -$ общий простой делитель этих чисел, тогда

$$\begin{cases} b^2 + 2 = pN, \\ 2b - 1 = pM, \end{cases}$$

где N и $M -$ натуральные.

Исключая b из левых частей уравнений этой системы, получаем

$$9 = 4(b^2+2) - (2b-1)(2b+1) = (4N - (2b+1)M)p.$$

Значит $(4N - (2b+1)M) -$ натуральное, а $p -$делитель 9, т.е. $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} b^2 + 2 = p^m, \\ 2b - 1 = p^k, \end{cases}$$

где m и $k -$ натуральные и $m > k$.

Так как

$$9 = 4(b^2+2) - (2b-1)(2b+1) = 4 \cdot 3^m - (3^k + 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2),$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k - 2$ не делится на 3, то $k = 2$ и $m = 3, b = 5, x = \frac{3}{2}$.

Для отрицательных b решение проводится почти аналогично. Положим $c = -b$. Тогда исходное уравнение будет записываться в виде:

$$(2c+1)^x = c^2 + 2, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Случай $c = 1$ очевиден, поскольку решение $x = 1$. Пусть $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$. Аналогично предыдущему показывается, что в представлении $x = d/q$ числа d и q натуральные. Опять предположив, что $p -$ общий простой делитель этих чисел, получим

$$\begin{cases} c^2 + 2 = pN, \\ 2c + 1 = pM, \end{cases}$$

и также сделаем вывод, что $p = 3$. Поэтому

$$\begin{cases} c^2 + 2 = 3^m, \\ 2c + 1 = 3^k, \end{cases}$$

где m и $k -$ натуральные и $m > k$.

Так как

$$9 = 4(c^2+2) - (2c-1)(2c+1) = 4 \cdot 3^m - (3^k - 2) \cdot 3^k = 3^k(4 \cdot 3^{m-k} - 3^k + 2),$$

а $4 \cdot 3^{m-k} - 3^k + 2$ не делится на 3, то $k = 2$ и $4 \cdot 3^{m-2} - 3^2 + 2 = 1$ или $4 \cdot 3^{m-2} = 8$, но последнее уравнение не имеет натуральных решений.

Поэтому все решения описываются уравнениями: $[\operatorname{tg} a] = -1$ и $[\operatorname{tg} a] = 5$, решив которые приходим к ответу.

6-2. Ответ: $a \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right] \cup (\operatorname{arcctg} 6 + \pi n; \operatorname{arctg} 5 + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

6-3. Ответ: $a \in [-\operatorname{arctg} 5 + \pi n; -\operatorname{arctg} 4 + \pi n) \cup [\pi/4 + \pi n; \operatorname{arctg} 2 + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

6-4. Ответ: $a \in (\operatorname{arcctg}(-4) + \pi n; \operatorname{arcctg}(-5) + \pi n] \cup (\operatorname{arcctg}2 + \pi n; \pi/4 + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.