Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2023/2024 учебного года для 5-6 класса

1. На цветочном рынке Маша купила 156 хризантем, 312 тюльпанов и 390 роз. Какое наибольшее количество одинаковых букетов сможет составить Маша из этих цветов, чтобы все цветы были полностью израсходованы? (Букеты считаются одинаковыми, если в каждом из них одинаковое число цветов каждого наименования.)

Ответ: 78.

Решение Так как $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, $312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$ и $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, то она может составить $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$ букетов. В каждом букете будет 2 хризантемы, 4 тюльпана и 5 роз.

2. Аня и Таня договорились пойти в кино на новый фильм про Гарри Поттера. Аня собирается прийти за 10 минут до начала сеанса, чтобы спокойно занять места. Таня решила прийти через 5 минут после начала сеанса, чтобы пропустить рекламу которую показывают перед фильмом. Аня думает, что ее часы спешат на 15 минут, хотя на самом деле они отстают на 10 минут. Таня думает, что ее часы отстают на 5 минут, хотя они на самом деле спешат на 15 минут.

   Кто из девочек придет первой и сколько времени будет ждать подругу?

Ответ: Таня, 30 мин.

Решение: Допустим (не ограничивая общности), что сеанс начинается в 18:00. Аня наметила прийти в 17:50, но придет на 25=15+10 мин. позднее, т.е. в 18:15. Таня наоборот, наметила на 18:05, но придет на 20 мин. раньше, т.е. в 17:45.

3. При записи даты 20.04.24 по два раза использованы цифры «0» , «2» и «4».

Когда наступит ближайшая, следующая после 20.04.24 дата, для записи которой используются три различные цифры, причем каждая – ровно по 2 раза? Считаем, что дата записывается в формате ДД.ММ.ГГ, а если число меньше 10, то к нему слева приписываем «0», например, 01.02.24.

Ответ: 24.11.24.

Решение Будем искать дату в 2024 году, пусть она имеет вид ДД.ММ.24.

ММ может начинаться на 0 или 1, но если взять 0, то месяц может быть только 02 или 04, т.е. дата будет раньше данной. Пусть месяц начинается с 1, тогда дата записана двумя единицами, двумя двойками и двумя четверками, имеет вид ДД.1М.24. Ближайший подходящий месяц – ноябрь, значит ДД.11.24. Поскольку ДД не может быть 42, остается только 24.

4. Будем называть *палиндромом* такое натуральное число, которое слева направо и справа налево читается одинаково. Например 11, 323 и 4224 – палиндромы, а 2024 – нет. Существуют ли два палиндрома: один двузначный, другой – трехзначный, дающие в сумме четырехзначный палиндром?

   Ответ: да 22+979=1001

   Решение: Очевидно, трехзначный палиндром должен начинаться с цифры 9, а 4-значный – с цифры 1. Запишем (* - цифры, которые неизвестны)

   +9*9=11.

   Сумма может оканчиваться на 1 только если 2-значный палиндромоканыивается на 2:

   22+9*9=1**1. Заметим, что 22+9*9 < 22+1000=1022, следовательно, вторая цифра в сумме – 0

   22+9*9=1001, откуда легко получается 3-значный палиндром.

5. В шахматном кружке провели турнир - каждый сыграл с каждым по одной партии. Оказалось, что для любой тройки участников среди результатов их взаимных партий есть хотя бы одна ничья и хотя бы одна игра с победителем. Какое наибольшее число игроков могло участвовать в турнире?

   Ответ: 5

Решение. Допустим, что было 6 или более игроков. Выберем одного, назовем его Игрок1. Играя против оставшихся 5 игроков он либо сыграл не менее 3 вничью, либо не менее 3 раз не вничью. Допустим Игрок1 сыграл 3 раза вничью с игроками 2,3,4. По условию, какие-то двое из них сыграли вничью, допустим, это игроки 2 и 3. Тогда получается, что 1, 2 и 3 сыграли друг с другом вничью, что противоречит условию задачи.

Допустим теперь, что Игрок1 сыграл 3 раза не вничью с игроками 4,5,6. По условию, какие-то двое из них сыграли не вничью, допустим, это игроки 5 и 6. Тогда получается, что 1, 5 и 6 сыграли друг с другом не вничью - противоречие.

Пример с 5 игроками легко строится: Пусть 1-й выиграл у 2-го, 2-й - у 3-го, 3-й - у 4-го, 4-й - у 5-го и 5-й - у 1-го. А все остальные партии закончились вничью.

6. Империя Горных гномов состоит из семи королевств, в каждом из королевств гномы добывают золото и алмазы. Верно ли, что всегда можно выбрать такие четыре королевства, которые производят не менее 50% золота и не менее 50% алмазов (от общего производства в империи)?

Ответ: Верно.

Решение: Обозначим $g_1, g_2, \ldots, g_7$ производство золота, $d_1, \ldots d_7$ – алмазов, в каждом из королевств, считаем что королевства отсортированы так, чтобы выполнялись неравенства $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_7$. Сравним $D_{246} = d_2 + d_4 + d_6$, и $D_{357} = d_3 + d_5 + d_7$

Случай 1. $D_{246} \geq D_{357}$. Тогда, с одной стороны, $d_1 + d_2 + d_4 + d_6 = d_1 + D_{246} \geq D_{357}$.
С другой стороны $g_1 + g_2 + g_4 + g_6 \geq g_3 + g_5 + g_7$, поскольку $g_2 \geq g_3, g_4 \geq g_5, g_6 \geq g_7$. Значит, королевства №1,2,4,6 - искомые.

Случай 2. $D_{246} < D_{357}$. Очевидно, что $d_1 + d_3 + d_5 + d_7 \geq d_2 + d_4 + d_6$.
С другой стороны $g_1 + g_3 + g_5 + g_7 \geq g_2 + g_4 + g_6$, поскольку $g_1 \geq g_2, g_3 \geq g_4 , g_5 \geq g_6$
Значит, королевства №1,3,5,7 - искомые.