Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2023/2024 учебного года для 7-8 класса

1. На цветочном рынке Маша купила 156 хризантем, 312 тюльпанов и 390 роз. Какое наибольшее количество одинаковых букетов сможет составить Маша из этих цветов, чтобы все цветы были полностью израсходованы? (Букеты считаются одинаковыми, если в каждом из них одинаковое число цветов каждого наименования.)

Ответ: 78.

Решение Так как $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, $312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$ и $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, то она может составить $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$ букетов. В каждом букете будет 2 хризантемы, 4 тюльпана и 5 роз.

2. При записи даты 20.04.24 по два раза использованы цифры «0» , «2» и «4». Когда наступит ближайшая, следующая после 20.04.24 дата, для записи которой используются три различные цифры, причем каждая – ровно по 2 раза? Считаем, что дата записывается в формате ДД.ММ.ГГ, а если число меньше 10, то к нему слева приписываем «0», например, 01.02.24.

Ответ: 24.11.24.

Решение Будем искать дату в 2024 году, пусть она имеет вид ДД.ММ.24.

ММ может начинаться на 0 или 1, но если взять 0, то месяц может быть только 02 или 04, т.е. дата будет раньше данной. Пусть месяц начинается с 1, тогда дата записана двумя единицами, двумя двойками и двумя четверками, имеет вид ДД.1М.24. Ближайший подходящий месяц – ноябрь, значит ДД.11.24. Поскольку ДД не может быть 42, остается только 24.

3. Будем называть *палиндромом* такое натуральное число, которое слева направо и справа налево читается одинаково. Например 11, 323 и 4224 – палиндромы, а 2024 – нет. Существуют ли два палиндрома: один двузначный, другой – трехзначный, дающие в сумме четырёхзначный палиндром?

Ответ: да 22+979=1001

Решение: Очевидно, трехзначный палиндром должен начинаться с цифры 9, а 4-значный – с цифры 1. Запишем (* - цифры, которые неизвестны)

+9*9=11.

Сумма может оканчиваться на 1 только если 2-значный палиндромоканыивается на 2:

22+9*9=1**1. Заметим, что 22+9*9 < 22+1000=1022, следовательно, вторая цифра в сумме – 0

22+9*9=1001, откуда легко получается 3-значный палиндром.

4. В шахматном кружке провели турнир - каждый сыграл с каждым по одной партии. Оказалось, что для любой тройки участников среди результатов их взаимных партий есть хотя бы одна ничья и хотя бы одна игра с победителем. Какое наибольшее число игроков могло участвовать в турнире?

   Ответ: 5

   Решение. Допустим, что было 6 или более игроков. Выберем одного, назовем его Игрок1. Играя против оставшихся 5 игроков он либо сыграл не менее 3 вничью, либо не менее 3 раз не вничью. Допустим Игрок1 сыграл 3 раза вничью с игроками 2,3,4. По условию, какие-то двое из них сыграли вничью, допустим, это игроки 2 и 3. Тогда получается, что 1, 2 и 3 сыграли друг с другом вничью, что противоречит условию задачи.

   Допустим теперь, что Игрок1 сыграл 3 раза не вничью с игроками 4,5,6. По условию, какие-то двое из них сыграли не вничью, допустим, это игроки 5 и 6. Тогда получается, что 1, 5 и 6 сыграли друг с другом не вничью - противоречие.

   Пример с 5 игроками легко строится: Пусть 1-й выиграл у 2-го, 2-й - у 3-го, 3-й - у 4-го, 4-й - у 5-го и 5-й - у 1-го. А все остальные партии закончились вничью.

5. Империя Горных гномов состоит из семи королевств, в каждом из королевств гномы добывают золото и алмазы. Верно ли, что всегда можно выбрать такие четыре королевства, которые производят не менее 50% золота и не менее 50% алмазов (от общего производства империи)?

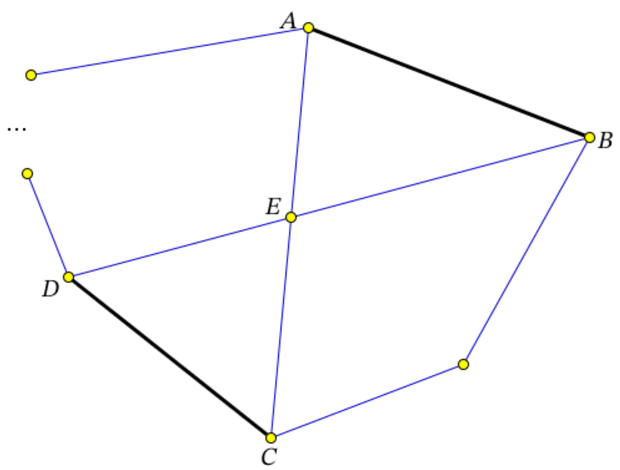
Ответ: Верно.

Решение: Обозначим $g_1, g_2, \dots, g_7$ производство золота, $d_1, \dots d_7$ – алмазов, в каждом из королевств, считаем что королевства отсортированы так, чтобы выполнялись неравенства $g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_7$. Сравним $D_{246} = d_2 + d_4 + d_6$, и $D_{357} = d_3 + d_5 + d_7$

Случай 1. $D_{246} \geq D_{357}$. Тогда, с одной стороны, $d_1 + d_2 + d_4 + d_6 = d_1 + D_{246} \geq D_{357}$.
С другой стороны $g_1 + g_2 + g_4 + g_6 \geq g_3 + g_5 + g_7$, поскольку $g_2 \geq g_3, g_4 \geq g_5, g_6 \geq g_7$. Значит, королевства №1,2,4,6 - искомые.

Случай 2. $D_{246} < D_{357}$. Очевидно, что $d_1 + d_3 + d_5 + d_7 \geq d_2 + d_4 + d_6$.
С другой стороны $g_1 + g_3 + g_5 + g_7 \geq g_2 + g_4 + g_6$, поскольку $g_1 \geq g_2, g_3 \geq g_4$, $g_5 \geq g_6$
Значит, королевства №1,3,5,7 - искомые.

6. В выпуклом 2024-угольнике длины всех диагоналей не превосходят 1. Какое наибольшее количество сторон длины 1 может быть в этом 2024-угольнике?
Напомним, что *выпуклым* называется многоугольник, все точки которого лежат по одну сторону от любой прямой, проходящей через две его соседние вершины.



Ответ: 2.

Решение: Докажем, что не может быть 3 и более сторон длины 1. От противного, допустим, таких сторон 3. Тогда найдутся две, не имеющие общих вершин. Обозначим их AB и CD . Пусть AC и BD пересекаются в точке E (см. рис.1). По неравенству треугольника $AE + EB > AB = 1, CE + ED > CD = 1$. Сложив эти неравенства, получим, что $AE + EB + CE + ED > 2$.

Но, с другой стороны, $AE + EB + CE + ED = AC + BD \leq 2$. Противоречие.

Пример, в котором ровно 2 стороны равны 1, можно построить следующим образом: возьмем окружность радиуса $r = 1$ с центром в точке A_1 и на дуге $A_2A_{2024} = 60^O$ выберем точки $A_3 \dots A_{2023}$. Тогда $A_1A_2 = A_1A_{2023} = 1$, а все диагонали не превосходят 1 (см. рис. 2).