Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2023/2024 учебного года для 9 класса

1. На цветочном рынке Маша купила 156 хризантем, 312 тюльпанов и 390 роз. Какое наибольшее количество одинаковых букетов сможет составить Маша из этих цветов, чтобы все цветы были полностью израсходованы? (Букеты считаются одинаковыми, если в каждом из них одинаковое число цветов каждого наименования.)

Ответ: 78.

Решение Так как $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, $312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$ и $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, то она может составить $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$ букетов. В каждом букете будет 2 хризантемы, 4 тюльпана и 5 роз.

2. В шахматном кружке провели турнир - каждый сыграл с каждым по одной партии. Оказалось, что для любой тройки участников среди результатов их взаимных партий есть хотя бы одна ничья и хотя бы одна игра с победителем. Какое наибольшее число игроков могло участвовать в турнире?

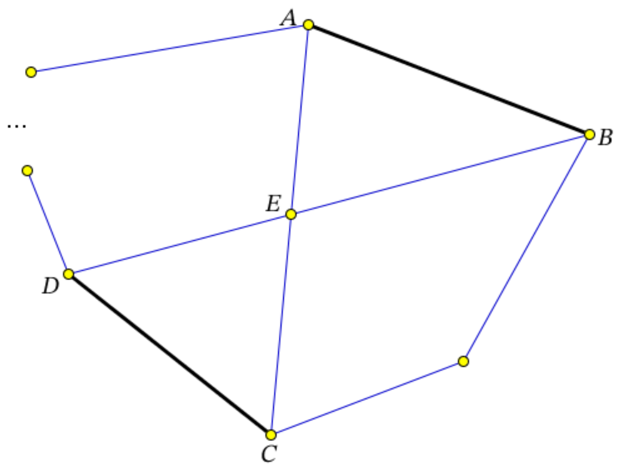
Ответ: 5

Решение. Допустим, что было 6 или более игроков. Выберем одного, назовем его Игрок1. Играя против оставшихся 5 игроков он либо сыграл не менее 3 вничью, либо не менее 3 раз не вничью. Допустим Игрок1 сыграл 3 раза вничью с игроками 2,3,4. По условию, какие-то двое из них сыграли вничью, допустим, это игроки 2 и 3. Тогда получается, что 1, 2 и 3 сыграли друг с другом вничью, что противоречит условию задачи.

Допустим теперь, что Игрок1 сыграл 3 раза не вничью с игроками 4,5,6. По условию, какие-то двое из них сыграли не вничью, допустим, это игроки 5 и 6. Тогда получается, что 1, 5 и 6 сыграли друг с другом не вничью - противоречие.

Пример с 5 игроками легко строится: Пусть 1-й выиграл у 2-го, 2-й - у 3-го, 3-й - у 4-го, 4-й - у 5-го и 5-й - у 1-го. А все остальные партии закончились вничью.

3. В выпуклом 2024-угольнике длины всех диагоналей не превосходят 1. Какое наибольшее количество сторон длины 1 может быть в этом 2024-угольнике?
Напомним, что *выпуклым* называется многоугольник, все точки которого лежат по одну сторону от любой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

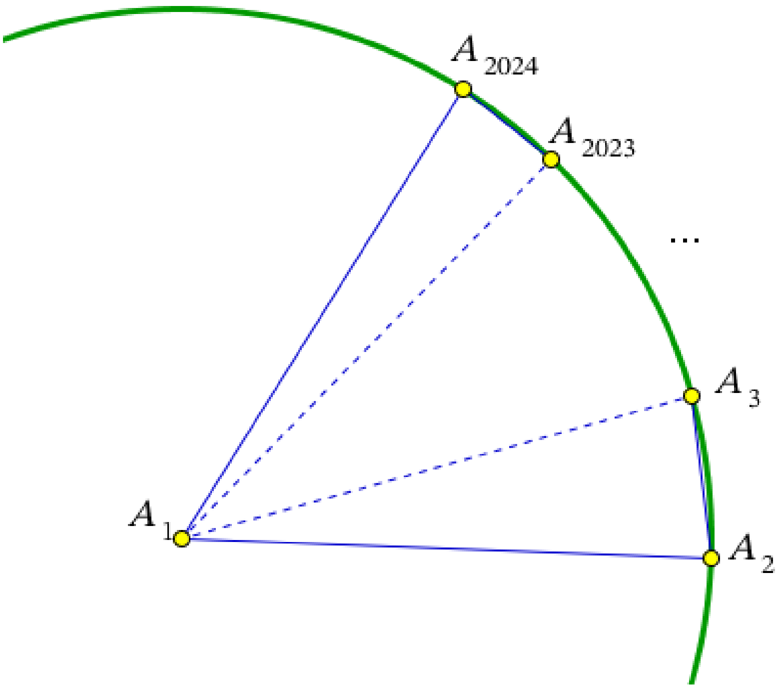


Ответ: 2.

Решение: Докажем, что не может быть 3 и более сторон длины 1. От противного, допустим, таких сторон 3. Тогда найдутся две, не имеющие общих вершин. Обозначим их AB и CD . Пусть AC и BD пересекаются в точке E (см. рис.1). По неравенству треугольника $AE + EB > AB = 1, CE + ED > CD = 1$. Сложив эти неравенства, получим, что $AE + EB + CE + ED > 2$.

Но, с другой стороны, $AE + EB + CE + ED = AC + BD \leq 2$. Противоречие.

Пример, в котором ровно 2 стороны равны 1, можно построить следующим образом: возьмем окружность радиуса $r = 1$ с центром в точке A_1 и на дуге $A_2A_{2024} = 60^O$ выберем точки $A_3 \ldots A_{2023}$. Тогда $A_1A_2 = A_1A_{2023} = 1$, а все диагонали не превосходят 1 (см. рис. 2).



4. Империя Горных гномов состоит из 2023 королевств, в каждом из королевств гномы добывают золото и алмазы. Верно ли, что всегда можно выбрать такие 1012 королевств, которые производят не менее 50% золота и не менее 50% алмазов (от общего производства империи)?

Ответ: Верно.

Решение: Обозначим $g_1, g_2, \dots, g_{2023}$ производство золота, $d_1, \dots d_{2023}$ – алмазов, в каждом из королевств, считаем что королевства отсортированы так, чтобы выполнялись неравенства $g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_{2023}$. Сравним $D_2 = d_2 + d_4 + \dots + d_{2022}$, и $D_3 = d_3 + d_5 + \dots + d_{2023}$

Случай 1. $D_2 \geq D_3$. Тогда, с одной стороны, $d_1 + d_2 + d_4 + \dots + d_{2022} = d_1 + D_2 \geq D_3$.
С другой стороны $g_1 + g_2 + g_4 + \dots + g_{2022} \geq g_3 + g_5 + \dots + g_{2023}$, поскольку $g_2 \geq g_3, g_4 \geq g_5, \dots, g_{2022} \geq g_{2023}$. Значит, королевства №1,2,4,…2022 - искомые.

Случай 2. $D_2 < D_3$. Очевидно, что $d_1 + d_3 + d_5 + \dots + d_{2023} \geq d_2 + d_4 + \dots + d_{2022}$.
С другой стороны $g_1 + g_3 + g_5 + \dots + g_{2023} \geq g_2 + g_4 + \dots + g_{2022}$, поскольку $g_1 \geq g_2, g_3 \geq g_4, \dots, g_{2021} \geq g_{2022}$.
Значит королевства №1,3,5,…, 2023 - искомые.

5. Сколько существует различных квадратных трехчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p, q, для которых выполнены два условия:
   1) $f(2023) = 2025^{24}$;
   2) уравнение $f(x) = 0$ имеет целый корень.

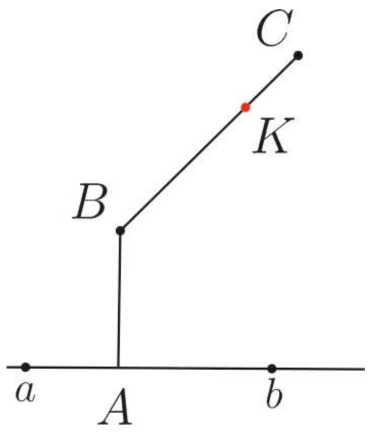
Ответ: 4754.

Решение: Обозначим $g(x) = f(x + 2023)$ – это тоже трехчлен с целыми коэффициентами и свободным членом, равным 2025^{24}. У многочлена $g(x)$ есть корни, значит его можно представить в виде $g(x) = (x - a)(x - b)$, и раз $g(0) = 2025^{24}$, то и произведение его корней должно равняться 2025^{24}.

Разложим 2025 на простые множители: $2025 = 3^4 \times 5^2$, следовательно $2025^{24} = 3^{96} \times 5^{48}$

У этого числа $(96 + 1)(48 + 1) = 4753$ натуральных делителей, которые можно разбить на 2376 пар, произведение, которых равно 2025^{24}, а делитель, равный $\sqrt{2025^{24}}$, не будет иметь пары. Всего получается 2377 вариантов с положительными корнями, к которым надо добавить столько же вариантов с отрицательными, итого 4754. Очевидно, что все эти варианты дают разные квадратные трехчлены $g(x)$ (т.к. корни разные), а значит $f(x)$ тоже будут разные.

6. Робот-маляр пытается покрасить стену. Робот представляет из себя конечность из трёх деталей.

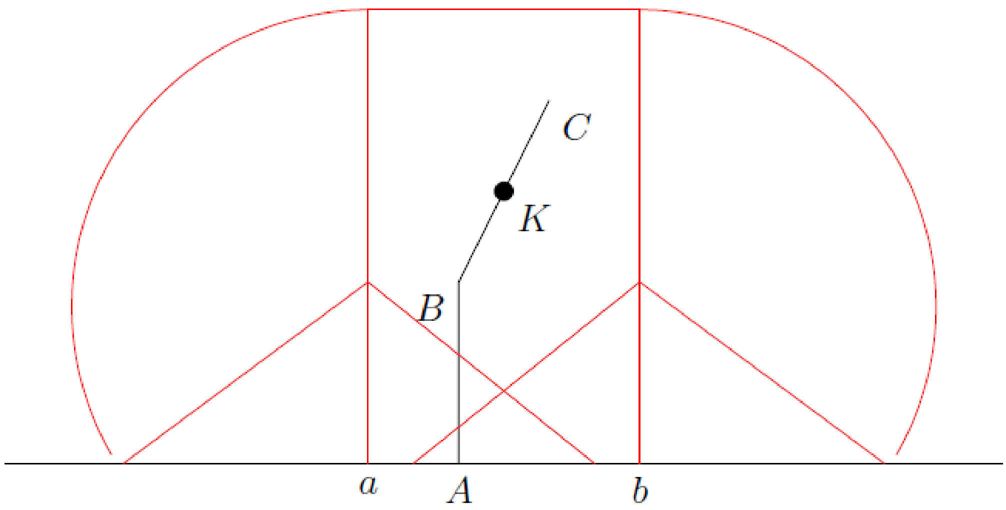


Штанга AB длиной l перпендикулярна полу и может ездить от точки a до точки b (расстояние между a и b равно $2l$). Вторая часть конечности, штанга BC длиной $2l$, свободно поворачивается относительно шарнира B. По штанге BC ползает красящая насадка K .

Какую площадь стены сможет покрасить этот механизм?

ОТВЕТ: $S = \left(\frac{8}{3}\pi + 8 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)l^2.$

РЕШЕНИЕ: Манипулятор сможет достать до отмеченных на рисунке точек. Мы учитываем, что штанга BC может упираться в пол, из-за чего покрасить маленький треугольник посередине не получится.



Радиус круглых кусков равен длине $BC = 2l$. Они дополняются прямоугольными треугольниками с катетом высотой с штангу $AB = l$ и гипотенузой (штангой BC) длиной $2l$. То есть треугольники с углом в 60 градусов, второй катет равен $\sqrt{3}l$. Значит, углы двух секторов равны 120 градусам. Прямоугольник посередине имеет основание ab шириной в $2l$ (по условию) и высоту в $3l$ (распрямлённый манипулятор достаёт до такой высоты). Углы при основании маленького треугольника равны 30 градусам, а само основание равно $2l - 2(2l - \sqrt{3}l) = (2\sqrt{3} - 2)l$. Высота маленького треугольника, соответственно, равна $(2\sqrt{3} - 2)l / (2\sqrt{3}) = (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})l$.

В итоге площадь получается такая (два сектора + 2 треугольника + прямоугольник - маленький треугольник):

$$\pi 4l^2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}l^2 + 2l \cdot 3l - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)l(2\sqrt{3} - 2)l =$$

$$= \left(\frac{8}{3}\pi + 8 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)l^2.$$