

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-1

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 3 м/с модель Альфа продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Бета, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |2x - 1| - |2x - 3| + 6$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x + 3) \leq f(x) + 6 \quad \text{и} \quad f(x + 2) \geq f(x) + 4.$$

3. Решите уравнение

$$36 \cos(x + \cos x) \cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике PVG обозначили точку пересечения высот через H , центр описанной окружности через O . Площади треугольников ONP и OHV равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника OHG .

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B , а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A , B и C , а сумма ее координат равна (-2023) . Найдите минимально возможную при данных условиях длину отрезка AB .

6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{tg} a] - 1|^x = [\operatorname{tg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x . Здесь, $[t]$ – целая часть числа t .

Апрель 2024 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-2

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 4 м/с модель А-1 продержалась в воздухе на 150 секунд меньше модели Б-2, но пролетела на 500 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |3x - 2| - |3x - 4| + 5$ при $x \in [0; 2]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x + 3) - 6 \leq f(x) \quad \text{и} \quad f(x + 2) - 4 \geq f(x).$$

3. Решите уравнение

$$36 \sin(x + \sin x) \sin(x - \sin x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике ABC обозначили точку пересечения высот через H , центр описанной окружности через O . Площади треугольников AOH и BOH равны 15 и 8 соответственно. Найдите площадь треугольника COH .

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B , а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A , B и C , а сумма квадратов ее координат равна 2021. Найдите максимально возможную при данных условиях длину отрезка AB .

6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{ctg} a] - 1|^x = [\operatorname{ctg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x . Здесь, $[t]$ – целая часть числа t .

Апрель 2024 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-3

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 3 м/с модель Альфа продержалась в воздухе на 300 секунд меньше модели Бета, но пролетела на 700 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |2x + 3| - |2x + 1| + 4$ при $x \in [-2; 0]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x + 3) \leq f(x) + 6 \quad \text{и} \quad f(x + 2) \geq f(x) + 4.$$

3. Решите уравнение

$$36 \cos(x + \cos x) \cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике PVG обозначили точку пересечения высот через H , центр описанной окружности через O . Площади треугольников ONP и ONV равны 25 и 13 соответственно. Найдите площадь треугольника OHG .

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B , а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A , B и C , а сумма ее координат равна (-2022) . Найдите минимально возможную при данных условиях длину отрезка AB .

6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{tg} a] + 1|^x = [\operatorname{tg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x . Здесь, $[t]$ – целая часть числа t .

Апрель 2024 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-4

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 2 м/с модель А-1 продержалась в воздухе на 400 секунд меньше модели Б-2, но пролетела на 900 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |3x + 4| - |3x + 2| + 7$ при $x \in [-2; 0]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x + 3) - 6 \leq f(x) \quad \text{и} \quad f(x + 2) - 4 \geq f(x).$$

3. Решите уравнение

$$36 \sin(x + \sin x) \sin(x - \sin x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике ABC обозначили точку пересечения высот через H , центр описанной окружности через O . Площади треугольников AOH и BOH равны 9 и 5 соответственно. Найдите площадь треугольника COH .

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B , а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A , B и C , а сумма квадратов ее координат равна 2021. Найдите максимально возможную при данных условиях длину отрезка AB .

6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{ctg} a] + 1|^x = [\operatorname{ctg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x . Здесь, $[t]$ – целая часть числа t .

Апрель 2024 г.