Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2023/2024 учебного года для 10 класса

1. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 1000 и противолежащим ей углом $\frac{7\pi}{13}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 785398.

Решение. Если круг радиуса R содержит треугольник со стороной 2*a=1000*, то $2R \geq 2a$, то есть $R \geq a$. Если круг описан около треугольника, то по теореме синусов его радиус равен $\frac{a}{\sin\alpha} > a$.

Осталось заметить, что круг с диаметром, совпадающим с известной стороной, равной 2*a*, содержит третью вершину треугольника (то есть и весь треугольник целиком), так как $\frac{7\pi}{13} > \frac{\pi}{2}$. Поэтому радиус круга равен *a* и его площадь есть πa^2.

2. Коле на день рождения подарили набор из 12 фломастеров разных цветов. Коля начал рисовать одинаковые по размеру правильные треугольники и раскрашивать их стороны новыми фломастерами, каждую сторону треугольника он раскрашивает одним из 12 цветов. Коля хочет, чтобы у него не оказалось одинаково раскрашенных треугольников. Одинаково раскрашенными Коля считает треугольники, составленные из одинаковых по цвету отрезков. Например, треугольники на рис. 1 являются одинаковыми (они составлены из зеленого, красного и синего отрезков), а треугольники на рис. 2 не одинаковы (в одном из них две синих стороны и одна красная, а в другом две красных и одна синяя). Какое максимальное количество разных треугольников Коля сможет раскрасить таким образом?

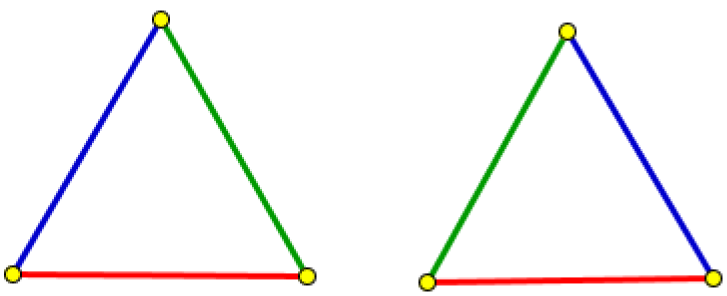


Рис 1. Треугольники раскрашены одинаково

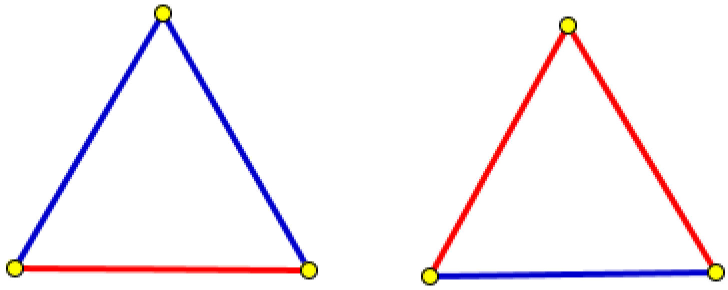


Рис 2. Треугольники раскрашены по-разному

Ответ: 364

Решение: Треугольников, покрашенных в один цвет, будет 12. Треугольников, покрашенных в 2 цвета $12 \cdot 11 = 132$ (первый цвет будет у двух сторон, второй – у третьей стороны). Треугольников, покрашенных в 3 цвета, будет $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$ (выбираем три цвета и учитываем, что для каждого выбора цветов треугольник повторяется 6 раз). Поэтому уникальных треугольников будет 12+132+220 = 364.

3. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $2m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 17.

Решение. Пусть Петя задумал числа x и y. Тогда

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 12005.$$

Поэтому x делится на y и

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 12005 \Leftrightarrow \frac{x}{y}(y + 1)^2 = 12005.$$

Обозначим $\frac{x}{y} = n$, тогда $n(y + 1)^2 = 12005$. Так как $12005 = 5 \cdot 7^4$, то возможны следующие варианты:

1) $y + 1 = \pm 1, n = 12005 \Rightarrow (x; y) = (-24010;\ -2)$ (разумеется, $y = 0$ не подходит);

2) $y + 1 = \pm 7, n = 5 \cdot 7^2 = 375 \Rightarrow (x; y) = (2250;\ 6)$ или $(x; y) = (-3000;\ -8)$;

3) $y + 1 = \pm 49, n = 5 \Rightarrow (x; y) = (240;\ 48)$ или $(x; y) = (-250;\ -50)$.

Таким образом, имеется 5 решений:

$$(x; y) = (-24010;\ -2), (2250; 6), (-3000;\ -8), (240; 48),$$

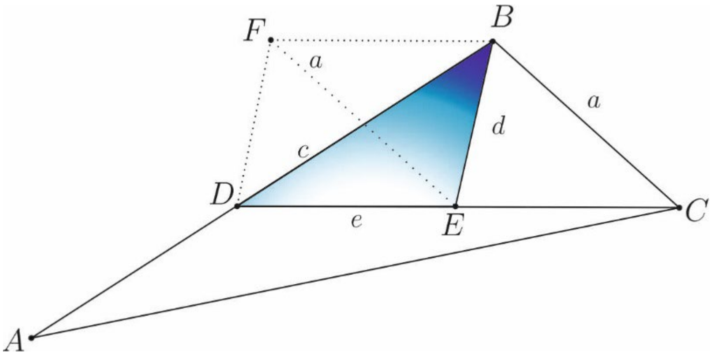
$$(-250;\ -50).$$

Значит, вероятность того, что Гена угадает числа Пети, равна $\frac{1}{5}$. Поэтому $m = 1, n = 5, 2m + 3n = 17$.

4. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC, причём $BD : DA = (\sqrt{3}+1):2$. Точка *E* – середина отрезка *DC*. Найдите минимально возможное значение выражения $AB^2 + BC^2$, если известно, что произведение всех медиан в треугольнике DBE не менее 2024. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 1280.06.

Решение. Обозначим $c = |BD|$, $a = |BC|$, $d = |BE|$, $e = |DE|$, медианы в треугольнике DBE обозначим через m_c, m_d, m_e. Тогда из условия вытекает, что $AB = \sqrt{3}c$. Если достроить параллелограмм $DFBE$ (см рис. 1), то из равенства $DE = EC$ вытекает, что $EFBC$ — тоже параллелограм, откуда $EF = a$ и $a^2 + c^2 = 2(d^2 + e^2)$.



Используя то, что сумма всех квадратов сторон в произвольном треугольнике равна 4/3 от суммы всех квадратов медиан, получаем

$$AB^2 + BC^2 = a^2 + 3c^2 = 2c^2 + (a^2 + c^2) = 2c^2 + 2(e^2 + d^2) = 2(c^2 + e^2 + d^2) = \frac{8}{3}(m_c^2 + m_d^2 + m_e^2) \geqslant$$

$$8(m_c \cdot m_d \cdot m_e)^{2/3} \geqslant 8 \cdot (2024)^{2/3} = 1280.059997... \approx 1280.06$$

Знак равенства в данной оценке достигается в случае, когда треугольник DBE равносторонний.

5. Найдите коэффициент при x^{65} в многочлене

$$(x^{200} + x^{199} + x^{198} + \cdots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 2211.

Решение. Умножив многочлен $(x^{200} + x^{199} + x^{198} + \cdots + x^2 + x + 1)$ дважды сам на себя, получим сумму одночленов вида $x^m x^n x^k$, где $m, n, k \in [0; 200]$. Это означает, что коэффициент при x^{65} равен числу решений уравнения $m + n + k = 65$ в целых неотрицательных числах.

Это число равно количеству способов разложить 65 шаров по трем ящикам. Рассмотрим ряд из 67 объекта: 65 шаров и 2 перегородок, расположенных в случайном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует определенному способу расположения шаров в ящиках: в первом ящике находятся шары, расположенные слева от первой перегородки, во втором ящике – шары, расположенные между первой и второй перегородками, в третьем – шары, расположенные справа от второй перегородки (шаров может не быть между некоторыми перегородками). Следовательно, количество способов расположить шары в коробках равно числу различных рядов по 65 шаров и 2 перегородок, то есть равно $C_{67}^2 = \frac{67 \cdot 66}{2} = 2211$.

6. Найдите наибольшее значение выражения
$$M(x,y,z) = \frac{|10^3(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)|}{9(x^2+y^2+z^2)^2}$$
при условии, что x, y, z не обращаются одновременно в ноль. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $44{,}19$.
Решение: Не ограничивая общности можно считать $z \geq y \geq x$ (иначе переставим переменные). Также заметим, что при умножении x, y, z на одно и то же число величина $M(x,y,z)$не меняется. В силу однородности числителя и знаменателя, за счёт умножения на одно и тоже число как числителя, так и знаменателя можно добиться, чтобы $|x+y+z| = 1$. Обозначим $z - x = 2d$, Тогда $(z-y)(y-x) \leq d^2$, т.е. $P = |(z-x)(z-y)(y-x)(x+y+z)| \leq 2d^3$. С другой стороны
$Q = 9(x^2+y^2+z^2)^2 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x+y+z)^2 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + 4d^2 + 1 \geq 6d^2 + 1$. Запишем правую часть как $4 \cdot \frac{1}{4}(2d^2 + 2d^2 + 2d^2 + 1)$ и воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:
$$4 \cdot \frac{1}{4}(2d^2 + 2d^2 + 2d^2 + 1) \geq 4\sqrt[4]{8d^6}.$$

Таким образом $Q^2 \geq 32\sqrt{2}\ d^3$, следовательно, $\frac{P}{Q^2} \leq \frac{2d^3}{32\sqrt{2}\ d^3} = \frac{\sqrt{2}}{32}$, и максимальное значение равно $\frac{1000\sqrt{2}}{32} = \frac{125\sqrt{2}}{4} = 44{,}19417 \ldots \approx 44{,}19$.

Подберем теперь (x, y, z) так, чтобы все неравенства превратились в равенства.

Тогда $2d^2 = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = x + d, z = x + 2d, x + y + z = 1 \ \Rightarrow 3(x + d) = 1$.

Видим, что при $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ равенство выполняется.