Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (6 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (4 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

1. Решите неравенство $\sqrt{3x+2}-\sqrt{4-x}\leq\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}.$ В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим решениями, находящимися в интервале $[-100, 100]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,67. **Решение.** Правая часть неравенства равна

$$=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Левая часть неравенства – монотонно возрастающая функция, правая часть константа. При $x=2$ правая и левая части совпадают.

Поэтому $x\leq 2$ на ОДЗ, то есть $x\in\left[-\frac{2}{3};2\right]$. Искомая разность: $2-\left(-\frac{2}{3}\right)=2\frac{2}{3}\approx 2{,}67$.

2. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x$.

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой. $A=\left[\frac{(1+3m)\pi}{3};\frac{(8m+9)\pi}{8}\right], m=-4.$

Ответ: $-9{,}42$. **Решение.** Обозначив $\operatorname{tg} x = t$ и использовав формулу тангенса суммы, получим:

$$\frac{t+1}{1-t}+\frac{t-1}{1+t}=t \Leftrightarrow \frac{(t^2+2t+1)-(t^2-2t+1)}{1-t^2}=t \Leftrightarrow \frac{4t}{1-t^2}=t.$$

Отсюда или $t=0$, или $\frac{4}{1-t^2}=1 \Leftrightarrow t^2=-3$ (что невозможно). Значит, $\operatorname{tg} x = 0$, $x=\pi k, k \in Z$.

В интервал $\left[\frac{(1-12)\pi}{3}; \frac{(-32+9)\pi}{8}\right]=\left[\frac{\pi}{3}-4\pi; \frac{9\pi}{8}-4\pi\right]$ попадает одно значение $x=-4\pi+\pi=-3\pi \approx -9{,}42$.

3. В прямоугольном треугольнике *ABC* из вершины прямого угла *C* проведена высота *CH*. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники *CHB* и *AHC* равны 3 и 4 соответственно. Найдите площадь треугольника *ABC*, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 150. **Решение.** Обозначим $\angle CAB$ через α. Из подобия треугольников *CHB* и *AHC* находим $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$. Отсюда $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

Пусть *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *AHC*, а *OD* (*D* – точка на стороне *CA*) – ее радиус. Тогда

$$\operatorname{tg}\angle DAO=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{3}, \qquad \operatorname{tg}\angle DCO=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},$$

$$AD=12, \qquad CD=8, \qquad CA=20, \qquad BC=15, \qquad S_{ABC}=150.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^4-3x^2y^2+y^4=-1, \\ \quad x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения x_k-y_k для каждого решения (x_k,y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,24. **Решение.** Замена $a = x^2 + y^2,\ b = xy$ сводит систему к следующей:

$$\begin{cases} a^2 - 5b^2 = -1, \\ a + b = 3. \end{cases}$$

Выразив $a = 3 - b$, получим уравнение $2b^2 + 3b - 5 = 9.$ Его корни $b = 1$ и $b = -\frac{5}{2}.$ Тогда, соответственно, $a = 2$ и $a = \frac{11}{2}.$

Первый случай: $(a; b) = (2; 1).$ Тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 4, \\ (x - y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1.$$

Второй случай: $(a; b) = \left(\frac{11}{2}; -\frac{5}{2}\right).$ В этом случае

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{11}{2}, \\ xy = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = \dfrac{1}{2}, \\ (x - y)^2 = \dfrac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + y| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ |x - y| = \sqrt{\dfrac{21}{2}}. \end{cases}$$

Выбираем максимум выражения $x - y$, он равен $\sqrt{\frac{21}{2}} \approx 3{,}24.$

5. Петя, спускаясь по движущемуся вниз эскалатору, насчитал *a* ступенек, а поднимаясь по соседнему движущему вверх эскалатору, *b* ступенек. Известно, что скорость, с которой Петя идет вверх относительно эскалатора, в *k* раз меньше скорости, с которой он идет вниз. Выясните, сколько ступенек насчитает Петя, поднимаясь по стоящему эскалатору, если скорость движения самого эскалатора всегда постоянна.

$a = 60$, $b = 36$, $k = 3$.

Ответ: 90. **Решение.** Пусть *x* – отношение скорости эскалатора к скорости Пети при спуске вниз. Тогда за время, за которое Петя проходит одну ступеньку, у эскалатора «уедет вниз» *x* ступенек. Следовательно, если Петя пройдет *a* ступенек, у эскалатора «уедет вниз» *ax* ступенек. Если бы эскалатор не двигался, Петя бы прошел все *a* + *ax* ступенек.

Аналогично, при движении вверх Петя пройдет b ступенек, а у эскалатора «уедет вверх» bkx ступенек. Если бы эскалатор не двигался, Петя бы прошел все $b + bkx$ ступенек.

Получаем уравнение $a + ax = b + bkx$, откуда $x = \frac{a-b}{bk-a}$ (допустимые параметры удовлетворяют условиям $b < a < bk$).

Всего ступенек получается

$$a + a \cdot \frac{a-b}{bk-a} = \frac{ab(k-1)}{bk-a}.$$

При заданных числовых данных получаем $\frac{60\cdot 36\cdot 2}{108-60} = 90$ (ступенек).

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 - 9ax^2 + (18a^2 + 4)x + a^2 + 32 = 0$$

имеет три различных корня, образующих арифметическую прогрессию. В ответе укажите сумму квадратов найденных значений a, при необходимости округлив её до двух знаков после запятой.

Ответ: 80. **Решение.** Если x_1, x_2, x_3 – корни, образующие арифметическую прогрессию, то их сумма, с одной стороны, равна $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2$, а с другой стороны, по теореме Виета их сумма равна $9a$. Значит, корнем уравнения является $x_2 = 3a.$ Подставляя его в уравнение, находим $a^2 + 12a + 32 = 0,$ откуда $a = -4$ или $a = -8.$ Непосредственной проверкой убеждаемся, что при каждом из этих a уравнение имеет 3 различных корня, образующих арифметическую прогрессию. Поэтому ответ: $(-4)^2 + (-8)^2 = 16 + 64 = 80.$

Набор творческих задач.

I. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной $2a$ и противолежащим ей углом $\alpha > \frac{\pi}{2}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: πa^2.

Решение. Если круг радиуса R содержит треугольник со стороной a, то $2R \geqslant 2a$, то есть $R \geqslant a$. Если круг описан около треугольника, то по теореме синусов его радиус равен $\frac{a}{\sin\alpha} \geqslant a$.

Осталось заметить, что круг с диаметром, совпадающим с известной стороной, равной $2a$, содержит третью вершину треугольника (то есть и весь треугольник целиком), так как $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Поэтому радиус круга равен a и его площадь есть πa^2. □

1-1. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2023 и противолежащим ей углом $\frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3214265.

1-2. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2023 и противолежащим ей углом $\frac{3\pi}{5}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3214265.

1-3. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2023 и противолежащим ей углом $\frac{5\pi}{9}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3214265.

1-4. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2024 и противолежащим ей углом $\frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3217443.

1-5. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2024 и противолежащим ей углом $\frac{3\pi}{5}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3217443.

1-6. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2024 и противолежащим ей углом $\frac{5\pi}{9}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3217443.

1-7. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2025 и противолежащим ей углом $\frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3220623.

1-8. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2025 и противолежащим ей углом $\frac{3\pi}{5}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3220623.

1-9. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2025 и противолежащим ей углом $\frac{5\pi}{9}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3220623.

1-10. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2022 и противолежащим ей углом $\frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3211088.

1-11. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2022 и противолежащим ей углом $\frac{3\pi}{5}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3211088.

1-12. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2022 и противолежащим ей углом $\frac{5\pi}{9}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3211088.

II. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $2m+3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 23.

Решение. Если первое число Пети равно x, а второе число равно y, то их сумма равна $(x+y)$, их разность равна $(x-y)$, их произведение равно xy, и их частное равно $\frac{x}{y}$. Тогда

$$(x+y)+(x-y)+xy+\ \frac{x}{y}=1500.$$

Поэтому x делится на y и

$$2x+xy+\frac{x}{y}=1500\ \ \frac{x}{y}(y+1)^2=1500.$$

Обозначим $\frac{x}{y}=N$, тогда $N(y+1)^2=1500$. Так как $1500=2^2\cdot 3\cdot 5^3$, то возможны следующие варианты:

- $y+1=\pm1,\ N=1500\ \Rightarrow (x;y)=(-3000;\ -2)$ (разумеется, $y=0$ не подходит);
- $y+1=\pm2,\ N=3\cdot5^3=375\Rightarrow (x;y)=(375;\ 1)$ или $(x;y)=(-1125;\ -3)$;
- $y+1=\pm5,\ N=2^2\cdot3\cdot5=60\Rightarrow (x;y)=(240;\ 4)$ или $(x;y)=(-360;\ -6)$;
- $y+1=\pm2\cdot5=\pm10,\ N=3\cdot5=15\Rightarrow (x;y)=(135;\ 9)$ или $(x;y)=(-165;\ -11)$.

Таким образом, имеется 7 решений:

$$(x;y)=(-3000;\ -2)\,,\ (375;1)\,,\ (-1125;\ -3)\,,\ (240;4)\,,$$

$$(-360;\ -6)\,,\ (135;9)\,,\ (-165;\ -11)\,.$$

Значит, вероятность того, что Гена угадает числа Пети, равна $\frac{1}{7}$. Поэтому $m=1,\ n=7,\ 2m+3n=23$.

Замечание. Часть решавших эту задачу неверно использовали модуль разности вместо разности, и/или частным двух чисел считали число, которое получается, если разделить одно из чисел на другое, не обращая внимания на их порядок. На самом деле, важен порядок чисел.
К примеру, у части решающих в ответ попала пара $(x;y)=(750;0)$. Их обоснование:

$$(750+0)+(750-0)+750\ \ \cdot0+0\ \ :750=1500.$$

Но, на самом деле, если взять пару $(x;y)=(750;0)$, то результат не определен, так как 750 не делится на 0. Если же взять пару $(x;y)=(0;750)$, то получается

$$(0+750)+(0-750)+0\cdot750+0\ \ :750=0\neq1500.$$

По тем же причинам не подходят пары $(-751;\ -1)$ и $(749;\ 1)$.

□

Варианты.

2.1. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $2m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 23.

2.2. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $3m + 2n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 17.

2.3. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $5m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 26.

2.4. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $3m + 5n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 38.

2.5. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $7m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 28.

2.6. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $3m + 7n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 52.

2.7. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $2m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 17.

2.8. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $3m + 2n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 13.

2.9. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $5m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 20.

2.10. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $3m + 5n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 28.

2.11. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $7m+3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 22.

2.12. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $3m+7n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 38.

III. Найдите коэффициент при x^{99} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Решение. Умножив многочлен $\left(x^{100}+x^{99}+\cdots+x+1\right)$ дважды сам на себя, получим сумму одночленов вида $x^m x^n x^k$, где $m,\ n,\ k\ \in[0;100]$. Это означает, что коэффициент при x^{99} равен числу решений уравнения $m+n+k=99$ в целых неотрицательных числах.

Это число равно количеству способов разложить 99 шаров по трем ящикам. Рассмотрим ряд из 101 объекта: 99 шаров и 2 перегородок, расположенных в случайном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует определенному способу расположения шаров в ящиках: в первом ящике находятся шары, расположенные слева от первой перегородки, во втором ящике – шары, расположенные между первой и второй перегородками, в третьем – шары, расположенные справа от второй перегородки (шаров может не быть между некоторыми перегородками). Следовательно, количество способов расположить шары в коробках равно числу различных рядов по 99 шаров и 2 перегородок, то есть равно $C_{101}^2=\frac{101\ \cdot 100}{2}=5050$.

Ответ: 5050. □

3-1. Найдите коэффициент при x^{99} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 5050.

3-2. Найдите коэффициент при x^{98} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4950.

3-3. Найдите коэффициент при x^{97} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4851.

3-4. Найдите коэффициент при x^{96} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4753.

3-5. Найдите коэффициент при x^{95} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4656.

3-6. Найдите коэффициент при x^{94} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4560.

3-7. Найдите коэффициент при x^{93} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4465.

3-8. Найдите коэффициент при x^{92} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4371.

3-9. Найдите коэффициент при x^{91} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4278.

3-10. Найдите коэффициент при x^{90} в многочлене

$$\left(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1\right)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4186.

IV. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC, причём $BD:DA=(\sqrt{3}+1):2$. Точка E — середина DC. Найдите минимально возможное значение выражения AB^2+BC^2, если известно, что произведение всех медиан в треугольнике DBE не менее m. При необходимости округлите ответ до сотых.

Решение. Обозначим $c=|BD|$, $a=|BC|$, $d=|BE|$, $e=|DE|$, медианы в треугольнике DBE обозначим через m_c, m_d, m_e. Тогда из условия вытекает, что $AB=\sqrt{3}c$. Если достроить параллелограмм $DFCE$ (см рис. 1), то из равенства $DE=EC$ вытекает, что $EFBC$ — тоже параллелограмм, откуда $EF=a$ и $a^2+c^2=2(d^2+e^2)$. Используя то, что сумма всех квадратов сторон в произвольном треугольнике равна $4/3$ от суммы всех квадратов медиан, получаем

$$AB^2+BC^2=a^2+3c^2=2c^2+(a^2+c^2)=2c^2+2(e^2+d^2)=2(c^2+e^2+d^2)=\frac{8}{3}(m_c^2+m_d^2+m_e^2)\geqslant$$
$$8(m_c\cdot m_d\cdot m_e)^{2/3}\geqslant 8\cdot(m)^{2/3}.$$

Знак равенства в данной оценке достигается в случае, когда треугольник DBE равносторонний.

Ответ: $8\cdot(m)^{2/3}$.

□

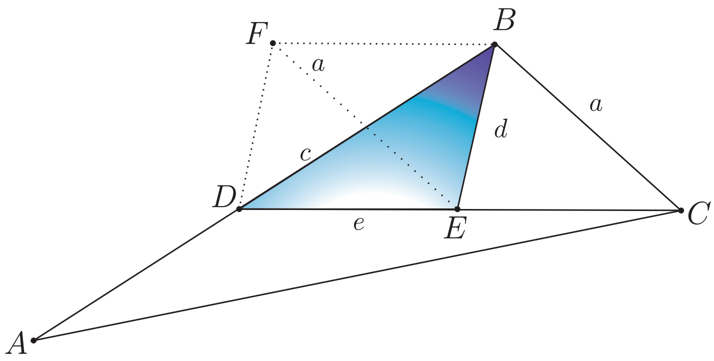

Рис. 1:

4-1. $m = 1700$. Ответ: 1139.52
4-2. $m = 1710$. Ответ: 1143.99
4-3. $m = 1720$. Ответ: 1148.44
4-4. $m = 1730$. Ответ: 1152.89
4-5. $m = 1740$. Ответ: 1157.33
4-6. $m = 1750$. Ответ: 1161.76
4-7. $m = 1760$. Ответ: 1166.18
4-8. $m = 1770$. Ответ: 1170.59
4-9. $m = 1781$. Ответ: 1175.44
4-10. $m = 1790$. Ответ: 1179.39
4-11. $m = 1800$. Ответ: 1183.78
4-12. $m = 1810$. Ответ: 1188.16
4-13. $m = 1820$. Ответ: 1192.53
4-14. $m = 1831$. Ответ: 1197.33
4-15. $m = 1840$. Ответ: 1201.25
4-16. $m = 1851$. Ответ: 1206.04
4-17. $m = 1860$. Ответ: 1209.94
4-18. $m = 1870$. Ответ: 1214.28
4-19. $m = 1881$. Ответ: 1219.03
4-20. $m = 1890$. Ответ: 1222.92