

Ответы и решения

1-1. Ответ: 54.

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть участвовало n команд, за победу дается a очков.

Пусть x — количество очков, набранных последней командой. Посчитаем число

разыгранных очков двумя способами. С одной стороны, это число равно $a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. С другой стороны, так как очки распределились в арифметической прогрессии, то, обозначив ее разность через d , получим $nx + d \frac{n(n-1)}{2}$.

Значит, $nx + d \frac{n(n-1)}{2} = a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. Так как $d = k \cdot a$, где k — натуральное число, то

$$nx + ka \frac{n(n-1)}{2} = a \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

откуда $nx = (1-k)a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, то есть $\frac{x}{a} = (1-k) \frac{n-1}{2}$.

Значит, для k есть две возможности: $k = 1$, $k = 0$. При $k = 0$ получается $d = 0$, что не годится по условию. Следовательно, $k = 1$ и $x = 0$.

Тогда при $a = 3$, $n = 20$ получаем $d = 3$ и первая команда наберет $0 + 3 \cdot 19 = 57$ очков, а вторая $0 + 3 \cdot 18 = 54$ очка.

Другой способ решения. Последняя команда в таблице набрала не менее 0 очков, 19-я команда — не менее 3 очков, 18-я команда — не менее 6 очков, ..., 2-я команда — не менее $0 + 3(19 - 1) = 54$ очков, 1-я команда — не менее $0 + 3(20 - 1) = 57$ очков. В то же время, 1-я команда не могла набрать более $19 \cdot 3 = 57$ очков, так как она сыграла 19 игр. Значит, 1-я команда набрала 57 очков, 2-я команда — 54 очка, 3-я команда — 51 очко, ..., 19-я команда — 3 очка, 20-я команда — 0 очков.

1-2. Ответ: 16.

2-1. Ответ: 10.

Решение. Во-первых, заметим, что года, у которых третья цифра 0 не могут быть

замечательными просто потому, что не образуется двух двузначных чисел, из которых год составлен. И хотя 2002 делится на $20 + 02$, а 2100 делится на $21 + 00$, эти года не будут замечательными, так как числа 02 и 00 соответственно не двузначные.

Для поиска остальных нужных годов обозначим год как $\overline{20ab}$. При этом $a \in [1, 9]$, $b \in [0, 9]$.

Если $\overline{20ab}$ делится на $20 + \overline{ab}$, то $\overline{20ab} - (20 + \overline{ab}) = 1980$ тоже делится на $20 + \overline{ab}$. Так как $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, то это число имеет $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 36$ делителей, и нужно найти те из них, которые находятся на отрезке $[20 + 10, 20 + 99] = [30, 119]$. Таких делителей 11, это числа: $2^2 \cdot 11 = 44$, $3 \cdot 11 = 33$, $3^2 \cdot 11 = 99$, $5 \cdot 11 = 55$, $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$, $2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$, $3^2 \cdot 5 = 45$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2^2 \cdot 3^2 = 36$. Тогда $\overline{ab}$ будет на 20 меньше, что соответствует следующим годам 2024, 2013, 2079, 2035, 2046, 2090, 2025, 2070, 2040, 2010, 2016.

Таким образом, всего в XXI веке замечательных годов 11. Но при ответе на вопрос «Сколько ещё замечательных годов...?», мы должны учесть все года, кроме 2025, то есть правильный ответ – 10.

Замечание. Отметим, что формулировка задачи не вполне строгая, и она, вообще говоря, допускала также трактовку, при которой года 2002 и 2100 также могли считаться замечательными. В этом случае она также считалась решенной правильно.

2-2. Ответ: 12.

3-1. Ответ: 251.

Решение. Так как для натуральных чисел n от 1 до 7 (включительно) $\left[\sqrt[3]{n} \right] = 1$, то все они входят в множество A . Всего 7 чисел.

Из отрезка $n \in [8, 26]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n} \right] = 2$, в множество A входят четные числа 8, 10, ..., 26. Всего их $\left\lfloor \frac{26-8}{2} \right\rfloor + 1 = 10$.

Из отрезка $n \in [27, 63]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n} \right] = 3$, в множество A входят кратные 3 числа 27, 30, ..., 63. Всего их $\left\lfloor \frac{63-27}{3} \right\rfloor + 1 = 13$.

В общем случае, из отрезка $n \in [k^3, (k+1)^3 - 1]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n} \right] = k$, в множество A входят числа, делящиеся на k . Всего этих чисел $\left\lfloor \frac{(k+1)^3 - 1 - k^3}{k} \right\rfloor + 1 = 3k + 4$.

Так как наименьшее и наибольшее числа из отрезка $[25, 2025]$ равны $25 = 3^3 - 2$ и $2025 = 12^3 + 297$, соответственно, то искомое количество равно сумме трех слагаемых:

а) количество четных чисел из отрезка $[25, 3^3 - 1]$, такое число одно – это число 26;

б) количество подходящих чисел из отрезка $[3^3, 12^3 - 1]$, оно равно

$$\sum_{k=3}^{11} (3k + 4) = \frac{13 + 37}{2} \cdot 9 = 225;$$

в) количество делящихся на 12 чисел из отрезка $[12^3, 2025]$, оно равно

$$\left\lfloor \frac{297}{12} \right\rfloor + 1 = 25.$$

Суммарное количество: $1 + 225 + 25 = 251$.

3-2. Ответ: 247.

4-1. Ответ: $a = 2, b = 4, c = 8$.

Решение. Максимум исходного выражения соответствует минимуму выражения

$$\frac{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)}{abc}.$$

Зафиксируем b и c , будем искать минимум $\frac{(1+a)(a+b)}{a} = a + \frac{b}{a} + (1+b)$. Так как $a + \frac{b}{a} \geq$

$$2\sqrt{a \cdot \frac{b}{a}}, \text{ то минимум достигается при } a = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \sqrt{b}.$$

Аналогично, если зафиксировать a и c , то получим $b = \sqrt{ac}$, а если зафиксировать a, b , то получим $c = 4\sqrt{b}$.

Решим систему $\begin{cases} a^2 = b \\ b^2 = ac \\ c^2 = 16b \end{cases}$, получим $a = 2, b = 4, c = 8$.

4-2. Ответ: $a = 2, b = 8, c = 4$.

5-1. Ответ: 81; $81 - 18\pi$.

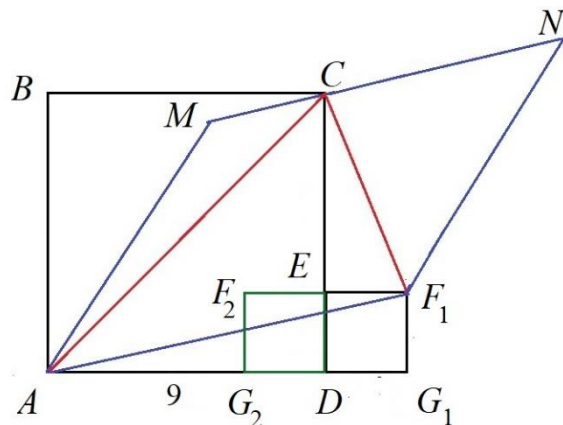
Решение. Возможны две разные конфигурации, в зависимости от того, где лежит точка F : вне большого квадрата или внутри него.

Площадь параллелограмма $AMNF$ равна удвоенной площади треугольника ACF , площадь которого можно найти после некоторых вычислений (с использованием тригонометрии или без нее).

Однако есть более эффективные способы решения.

В случае внешнего касания квадратов площадь $\triangle ACF_1$

равна площади $\triangle ACD$ (эти треугольники имеют одинаковое основание AC и равные высоты, так как $DF_1 \parallel AC$) и, следовательно, равна половине площади большого квадрата. Это значит, что площадь параллелограмма равна площади квадрата $ABCD$, то есть $9^2 = 81$.



Если точка F лежит внутри большого квадрата, то на первый взгляд, нахождение площади более громоздко. Однако и здесь есть простые способы.

Например, можно найти отношение высот треугольников ACF_2 и ACD (основания у них

одинаковы) – оно равно $\frac{\frac{9\sqrt{2}}{2} - \pi\sqrt{2}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = 1 - \frac{2\pi}{9}$. Тогда искомая площадь равна

$$81 \left(1 - \frac{2\pi}{9}\right) = 81 - 18\pi.$$

Или же, так как точка F_2 лежит на диагонали BD , то треугольники AF_2G_2 и CF_2E равны по площади, а значит,

$$S_{AF_2C} = S_{ACD} - 2S_{AF_2G_2} - S_{DEF_2G_2} = \frac{9^2}{2} - 2 \cdot \frac{(9 - \pi)\pi}{2} - \pi^2 = \frac{81}{2} - 9\pi.$$

Тогда площадь параллелограмма равна $81 - 18\pi$.

Обратим внимание, что сторона меньшего квадрата могла бы быть использована для решения задачи в первом случае, но в конечном итоге она не влияет на ответ в этом случае. А отношение $MC : CN$ не участвует в решении задачи в обоих случаях.

5-2. Ответ: 121; $121 - 22\pi$.

6-1. Ответ: если $m \neq 2$, то k – любое положительное число; если $m = 2$, то $k = 1$.

Решение. Рассмотрим 3 случая.

1. Если $k = 1$, то отрезок AB достаточно расположить так, чтобы точка O стала его серединой, а значит, четырёхугольник $ACBD$ — параллелограммом.

2. Если $k \neq 1$ и $m > 2$ (случай $m < 2$ рассматривается аналогично), то проекция $C'D' = z$ отрезка $CD = m$ на прямую l имеет длину

$$z = m \cos 60^\circ = \frac{m}{2} = 1 + \varepsilon > AB.$$

Передвинем отрезок AB по прямой l так, чтобы точки A, B, C', D' на ней располагались в указанном порядке, и обозначим $AC = a$, $BD = b$, $CC' = c$, $DD' = d$, $AC' = x$, $BD' = y$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + c^2, & b^2 &= y^2 + d^2, \\ y &= x + z - 1 \\ &= x + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда получаем, что величина

$$AC - BD = a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{x^2 - y^2 + c^2 - d^2}{a + b} = \frac{x - y + \frac{c^2 - d^2}{x + y}}{\frac{a + b}{x + y}} = \frac{-\varepsilon + \frac{c^2 - d^2}{2x + \varepsilon}}{\frac{a + b}{2x + \varepsilon}}$$

при неограниченном увеличении параметра x (а с ним и $2x + \varepsilon$) в некотором положении отрезка AB обязательно станет отрицательной. Аналогично, если те же точки на прямой l расположены в порядке C', D', A, B , то та же величина при неограниченном увеличении параметра x в некотором другом положении отрезка AB обязательно станет положительной. Поэтому в некотором промежуточном (между двумя указанными) положении отрезка AB рассматриваемая величина обязательно обнулится.

3. Если $k \neq 1$ и $m = 2$, то в обозначениях предыдущего пункта имеем

$$x = y, \quad c \neq d, \quad AC - BD = \frac{x^2 - y^2 + c^2 - d^2}{a + b} \neq 0.$$

6-2. Ответ: если $m \neq \sqrt{2}$, то k — любое положительное число, а если $m = \sqrt{2}$, то $k = 1$.

