

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2024/2025 учебного года

Вариант В-1

1. В турнире по волейболу участвовало 20 команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу, за выигрыш начислялось 3 очка, за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет). Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?
2. Даны лежащие в одной плоскости две трапеции $ABCD$ и $AEFD$ с общим основанием $AD = 6$ и одинаковыми высотами, равными 8. При этом $BC = EF = 2$, расстояние между точками C и E равно 1. Продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке P , а сторон AE и DF – в точке Q . Найдите площадь четырехугольника $APQD$.
3. Решите неравенство
$$2\log_4^2(x+3) \cdot \log_9^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2.$$
4. Множество A состоит из натуральных чисел n , делящихся на $\left[\sqrt[3]{n}\right]$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превышающее x . Найдите количество чисел из отрезка $[25, 2025]$, принадлежащих множеству A .
5. Найдите все положительные a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$$

выполняется при всех положительных x и y .

6. Отрезок $AB = 1$ лежит на прямой l и пересекается с отрезком $CD = t$ в точке O , причём $CO : OD = k$, $\angle AOC = 60^\circ$ и $AC \neq BD$. Для каких пар чисел t и k отрезок AB можно передвинуть по прямой l так, чтобы в его новом положении выполнялось равенство $AC = BD$?

Апрель 2025 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2024/2025 учебного года

Вариант В-2

1. В турнире по волейболу участвовало 10 команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу, за выигрыш начислялось 2 очка, за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет). Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?
2. Даны лежащие в одной плоскости две трапеции $ABCD$ и $AEFD$ с общим основанием $AD = 6$ и одинаковыми высотами, равными 16. При этом $BC = EF = 2$, расстояние между точками C и E равно 1. Продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке P , а сторон AE и DF – в точке Q . Найдите площадь четырехугольника $APQD$.
3. Решите неравенство
$$\log_2^2(x+2) \cdot \log_3^2(x+7) + 16 \leq 32 \cdot \log_9(x+2) \cdot \log_4(x+7).$$
4. Множество A состоит из натуральных чисел n , делящихся на $\left[\sqrt[3]{n}\right]$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превышающее x . Найдите количество чисел из отрезка $[36, 2025]$, принадлежащих множеству A .
5. Найдите все положительные a , при каждом из которых существуют положительные x и y , не удовлетворяющие неравенству

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2.$$

6. Отрезок $AB = 1$ лежит на прямой l и пересекается с отрезком $CD = t$ в точке O , причём $CO : OD = k$, $\angle AOC = 45^\circ$ и $AC \neq BD$. Для каких пар чисел t и k отрезок AB можно передвинуть по прямой l так, чтобы в его новом положении выполнялось равенство $AC = BD$?

Апрель 2025 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2024/2025 учебного года

Вариант В-3

1. В турнире по волейболу участвовало 12 команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу, за выигрыш начислялось 3 очка, за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет). Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?
2. Даны лежащие в одной плоскости две трапеции $ABCD$ и $AEFD$ с общим основанием $AD = 12$ и одинаковыми высотами, равными 8. При этом $BC = EF = 4$, расстояние между точками C и E равно 2. Продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке P , а сторон AE и DF – в точке Q . Найдите площадь четырехугольника $APQD$.
3. Решите неравенство
$$2\log_4^2(3-x) \cdot \log_9^2(8-x) \leq \log_3(3-x) \cdot \log_2(8-x) - 2.$$
4. Множество A состоит из натуральных чисел n , делящихся на $\left[\sqrt[3]{n}\right]$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превышающее x . Найдите количество чисел из отрезка $[16, 2025]$, принадлежащих множеству A .
5. Найдите все положительные a , при каждом из которых неравенство
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a + 2$$
выполняется при всех положительных x и y .
6. Отрезок $AB = 1$ лежит на прямой l и пересекается с отрезком $CD = t$ в точке O , причём $CO : OD = k$, $\angle AOC = 60^\circ$ и $AC \neq BD$. Для каких пар чисел t и k отрезок AB можно передвинуть по прямой l так, чтобы в его новом положении выполнялось равенство $AC = BD$?

Апрель 2025 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2024/2025 учебного года

Вариант В-4

1. В турнире по волейболу участвовало 15 команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу, за выигрыш начислялось 2 очка, за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет). Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?
2. Даны лежащие в одной плоскости две трапеции $ABCD$ и $AEFD$ с общим основанием $AD = 12$ и одинаковыми высотами, равными 16. При этом $BC = EF = 4$, расстояние между точками C и E равно 2. Продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке P , а сторон AE и DF – в точке Q . Найдите площадь четырехугольника $APQD$.
3. Решите неравенство
$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq 32 \cdot \log_9(2-x) \cdot \log_4(7-x).$$
4. Множество A состоит из натуральных чисел n , делящихся на $\left[\sqrt[3]{n}\right]$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превышающее x . Найдите количество чисел из отрезка $[49, 2025]$, принадлежащих множеству A .
5. Найдите все положительные a , при каждом из которых существуют положительные x и y , не удовлетворяющие неравенству

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a + 2.$$

6. Отрезок $AB = 1$ лежит на прямой l и пересекается с отрезком $CD = t$ в точке O , причём $CO : OD = k$, $\angle AOC = 45^\circ$ и $AC \neq BD$. Для каких пар чисел t и k отрезок AB можно передвинуть по прямой l так, чтобы в его новом положении выполнялось равенство $AC = BD$?

Апрель 2025 г.