

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2024/2025 учебного года для 9 класса

1. Назовем год *замечательным*, если номер года делится на сумму двузначных чисел, из которых этот номер составлен. Например, 2025 год – *замечательный*, поскольку 2025 делится на $20 + 25 = 45$. Назовите ближайший следующий *замечательный* год?

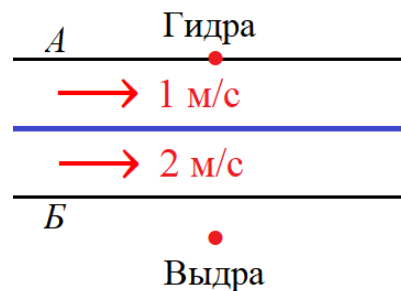
2. Дана доска 5×5 , в каждой из 25 клеточек которой стоит либо 0, либо 1. Никакие 3 единицы не могут стоять в подряд идущих клетках по горизонтали, по вертикали или по диагонали. Какое наибольшее число единиц может быть на доске?

3. Квадрат $ABCD$ со стороной 9 и квадрат $DEFG$ со стороной π имеют общую вершину D , при этом точка E лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение площади параллелограмма $AMNF$, если точка C лежит на отрезке MN и делит его в отношении $1 : \pi$.

4. При каких положительных значениях a и b достигается наибольшее значение следующего выражения?

$$\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)}$$

5. У канала шириной 20 метров от берега A до середины вода течёт со скоростью 1 м/сек, а после середины до берега B скорость течения удваивается. На берегу A у воды сидит Гидра. Напротив, на расстоянии 7 метров от берега B , сидит её подруга Выдра. Они одновременно бросаются навстречу друг другу – Гидра со скоростью 1 м/сек, а Выдра со скоростью V (и на суше, и в воде) Они обе держат путь перпендикулярно каналу, но вода, конечно, будет сносить их в сторону. Найдите скорость V , при которой встреча подруг произойдет как можно ближе к середине канала.



6. Назовем словом *размах* разность между наибольшим и наименьшим числом в наборе чисел $(x_1, \dots, x_n)$. Например, размах набора $(4, 1, 7, 1, 3)$ равен 6 (разность 7 и 1).

Дан набор 2025 чисел $(x_1, \dots, x_{2025})$ с размахом 1. Найдите наибольший возможный размах у набора чисел $(y_1, \dots, y_{2025})$, где

$$y_1 = x_1, y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dots, y_{2025} = \frac{x_1 + \dots + x_{2025}}{2025}.$$