

10 класс

Задачи и решения

Данный файл содержит печатные версии задач. Онлайн-версии могут незначительно отличаться в формулировках. В частности, отсюда убраны все рекомендации по вводу ответов в систему.

Некоторые задачи даны в общем виде, данные по вариантам представлены в соответствующих таблицах.

Задача 1. (2 балла)**Вариант 1**

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{500} .

Ответ: 172

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 6$, $a_7 = 7$, $a_8 = 8$, $a_9 = 8$, $a_{10} = 9$, $a_{11} = 9$, $a_{12} = 9$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_{10} каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , a_{n+3} , a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x + 1, x + 1, x + 1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$);
- 2) $x, x + 1, x + 1, x + 1, x + 2$;
- 3) $x, x, x, x + 1, x + 1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x + 1, x + 1, x + 1, x + 2, x + 2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x + 1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{500} = a_{497} + 1 = a_{494} + 2 = \dots = a_8 + \frac{492}{3} = 8 + 164 = 172$.

Вариант 2

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{1000} .

Ответ: 336

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 4$, $a_7 = 5$, $a_8 = 5$, $a_9 = 6$, $a_{10} = 6$, $a_{11} = 6$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , a_{n+3} , a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x + 1, x + 1, x + 1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 7$);
- 2) $x, x + 1, x + 1, x + 1, x + 2$;
- 3) $x, x, x, x + 1, x + 1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x + 1, x + 1, x + 1, x + 2, x + 2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x + 1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{1000} = a_{997} + 1 = a_{994} + 2 = \dots = a_7 + \frac{993}{3} = 5 + 331 = 336$.

Вариант 3

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{800} .

Ответ: 268

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 4$, $a_7 = 4$, $a_8 = 4$, $a_9 = 5$, $a_{10} = 5$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_6 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x+1, x+1, x+1$;
- 2) $x, x+1, x+1, x+1, x+2$;
- 3) $x, x, x, x+1, x+1$. (этот вид принимает база нашей индукции при $n=6$).

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1, x+1, x+1, x+2, x+2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

$$\text{Значит, } a_{800} = a_{797} + 1 = a_{794} + 2 = \dots = a_8 + \frac{792}{3} = 4 + 264 = 268.$$

Вариант 4

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, a_5 = 25$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{150} .

Ответ: 60

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 10, a_7 = 11, a_8 = 12, a_9 = 13, a_{10} = 13, a_{11} = 13, a_{12} = 14, a_{13} = 14$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x+1, x+1, x+1$;
- 2) $x, x+1, x+1, x+1, x+2$;
- 3) $x, x, x, x+1, x+1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n=9$).

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1, x+1, x+1, x+2, x+2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

$$\text{Значит, } a_{150} = a_{147} + 1 = a_{144} + 2 = \dots = a_9 + \frac{141}{3} = 13 + 47 = 60.$$

Вариант 5

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 7$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{400} .

Ответ: 137

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 4, a_7 = 5, a_8 = 6, a_9 = 6, a_{10} = 7, a_{11} = 7, a_{12} = 7$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_{10} каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x+1, x+1, x+1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n=8$);
- 2) $x, x+1, x+1, x+1, x+2$;
- 3) $x, x, x, x+1, x+1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1, x+1, x+1, x+2, x+2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

$$\text{Значит, } a_{400} = a_{397} + 1 = a_{394} + 2 = \dots = a_{10} + \frac{390}{3} = 7 + 130 = 137.$$

Вариант 6

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{200} .

Ответ: 72

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 6, a_7 = 7, a_8 = 8, a_9 = 8, a_{10} = 9, a_{11} = 9, a_{12} = 9$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_{10} каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x + 1, x + 1, x + 1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$;
- 2) $x, x + 1, x + 1, x + 1, x + 2$;
- 3) $x, x, x, x + 1, x + 1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x + 1, x + 1, x + 1, x + 2, x + 2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x + 1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{200} = a_{197} + 1 = a_{194} + 2 = \dots = a_8 + \frac{192}{3} = 8 + 64 = 72$.

Вариант 7

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{700} .

Ответ: 239

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 6, a_7 = 7, a_8 = 8, a_9 = 9, a_{10} = 9, a_{11} = 9, a_{12} = 10$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x + 1, x + 1, x + 1$;
- 2) $x, x + 1, x + 1, x + 1, x + 2$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$);
- 3) $x, x, x, x + 1, x + 1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x + 1, x + 1, x + 1, x + 2, x + 2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x + 1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{700} = a_{697} + 1 = a_{694} + 2 = \dots = a_{10} + \frac{690}{3} = 9 + 230 = 239$.

Вариант 8

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, a_5 = 15$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{350} .

Ответ: 123

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 7, a_7 = 8, a_8 = 9, a_9 = 10, a_{10} = 10, a_{11} = 10, a_{12} = 11$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x + 1, x + 1, x + 1$;
- 2) $x, x + 1, x + 1, x + 1, x + 2$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$);
- 3) $x, x, x, x + 1, x + 1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1, x+1, x+1, x+2, x+2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

$$\text{Значит, } a_{350} = a_{347} + 1 = a_{344} + 2 = \dots = a_8 + \frac{342}{3} = 9 + 114 = 123.$$

Вариант 9

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 9, a_5 = 16$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{550} .

Ответ: 188

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 5, a_7 = 6, a_8 = 7, a_9 = 8, a_{10} = 8, a_{11} = 8, a_{12} = 9$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x+1, x+1, x+1$;
- 2) $x, x+1, x+1, x+1, x+2$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$);
- 3) $x, x, x, x+1, x+1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1, x+1, x+1, x+2, x+2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

$$\text{Значит, } a_{550} = a_{547} + 1 = a_{544} + 2 = \dots = a_{10} + \frac{540}{3} = 8 + 180 = 188.$$

Вариант 10

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 10, a_2 = 6, a_3 = 3, a_4 = 1, a_5 = 0$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{200} .

Ответ: 68

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 4, a_7 = 4, a_8 = 4, a_9 = 5, a_{10} = 5, a_{11} = 5$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_6 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ имеет один из следующих трёх видов:

- 1) $x, x, x+1, x+1, x+1$;
- 2) $x, x+1, x+1, x+1, x+2$;
- 3) $x, x, x, x+1, x+1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 6$);

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1, x+1, x+1, x+2, x+2$, начинающуюся с a_{n+1} , что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x .

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x , значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

$$\text{Значит, } a_{200} = a_{197} + 1 = a_{194} + 2 = \dots = a_8 + \frac{192}{3} = 4 + 64 = 68.$$

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	5	1	1	2	2	1	0	10
b	3	2	4	4	2	3	3	3	1	6
c	5	3	3	9	3	5	5	6	4	3
d	7	4	2	16	5	7	8	10	9	1
e	9	5	1	25	7	11	13	15	16	0
n	500	1000	800	150	400	200	700	350	550	200
<i>Ответ</i>	172	336	268	60	137	72	239	123	188	68

Задача 2. (2 балла)(общий вид)

Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 + \frac{n^2}{c}$, причём все дроби несократимы.

Найдите $|a - b|$.

Число n в задаче является параметром, см. таблицу.

Ответ: $|a - b| = n$

Решение:

Перенесём 2 в левую часть, приведём её к общему знаменателю и получим

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab} = \frac{n^2}{c}.$$

Числа a и b не имеют общих делителей, поэтому $a + b$ также не имеет с ними общих делителей. Если несократимые дроби с натуральными числителями и знаменателями равны, то их числители и знаменатели совпадают. Значит, $(a - b)^2 = n^2$, откуда $|a - b| = n$.

Таблица с параметрами и по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Числитель (n^2)	16	25	36	49	64	81	100	121	400	900
Ответ (n)	4	5	6	7	8	9	10	11	20	30

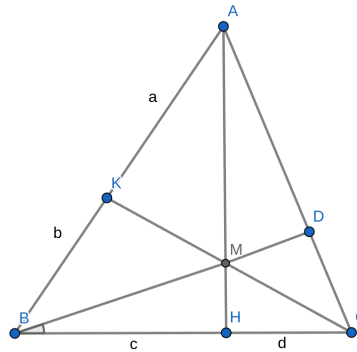
Задача 3. (3 балла)(общий вид)

В треугольнике ABC проведена высота AH . На стороне AB отмечена точка K . Оказалось, что $AK = a$, $KB = b$, $BH = c$, $CH = d$.

Отрезки AH и CK пересекаются в точке M . Найдите синус угла $\angle MBH$.

Ответ: $\sqrt{\frac{a + b - c}{2(a + b)}}$.

Решение: (варианты 1–9)



Пусть BM и AC пересекаются в точке D . По теореме Чевы $\frac{AD}{DC} = \frac{BH}{CH} \cdot \frac{AK}{BK} = \frac{ac}{bd}$.

Числа в условии подобраны так, что $d = \frac{ac^2}{b^2 + a(b - c)}$, поэтому $\frac{AD}{DC} = \frac{ac}{b \cdot \frac{ac^2}{b^2 + a(b - c)}} = \frac{b^2 + a(b - c)}{bc}$

С другой стороны,

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{a + b}{c + \frac{ac^2}{b^2 + a(b - c)}} = \frac{(a + b)(b^2 + a(b - c))}{c(b^2 + a(b - c)) + ac^2} = \frac{(a + b)(b^2 + a(b - c))}{b^2c + abc - ac^2 + ac^2} = \frac{(a + b)(b^2 + a(b - c))}{bc(a + b)} = \frac{b^2 + a(b - c)}{bc}.$$

Из этих равенств следует, что BD биссектриса $\angle B$.

В работах участников, разумеется, все эти равенства имеют место в численном виде.

Вычисляем $\cos \angle B = \frac{BH}{AB} = \frac{a + b}{c}$ и по формуле синуса половинного угла находим $\sin \angle MBH = \sqrt{\frac{a + b - c}{2(a + b)}}$.

Решение: (вариант 10)

(Аналогичное решение проходит и для вариантов 1–9). Запишем теорему Менелая для треугольника ABH и точек C , M , K лежащих на одной прямой:

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BC}{CH} \cdot \frac{MH}{AM} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{MH}{AM} \cdot 2 = 1,$$

то есть $MH = \frac{1}{4}AM = \frac{1}{5}AH$.

По теореме Пифагора находим $AH = \sqrt{15^2 - 4^2} = \sqrt{221}$. Отсюда $AM = \frac{\sqrt{221}}{5}$, $MB = \sqrt{\frac{222}{25} + 2^2} = \frac{\sqrt{321}}{5}$, $\sin \angle MBH =$

$$\frac{MH}{MB} = \frac{\sqrt{221}}{\sqrt{321}}$$

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$AK = a$	5	20	6	5	10	16	5	7	8	10
$BK = b$	10	10	9	5	5	8	10	14	12	5
$BH = c$	12	6	10	6	6	9	5	6	5	2
$CH = d$	8	4	8	9	24	27	1	1	1	2
$\cos B$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$
Ответ (округлённо, в меньшую сторону)	0,316	0,632	0,408	0,447	0,547	0,559	0,577	0,597	0,612	0,829

Задача 4. (3 балла)(общий вид)

Положительные числа a_i и b_i таковы, что $\sum_{i=1}^n a_i = x$, $\sum_{i=1}^n b_i = y$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\sum_{i=1}^n \frac{(a_i + b_i)^3}{a_i b_i}.$$

Ответ: $\frac{(x+y)^3}{xy}$

Решение:

Преобразуем:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(a_i + b_i)^3}{a_i b_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^3 + b_i^3}{a_i b_i} + 3 \cdot \frac{a_i^2 b_i + a_i b_i^2}{a_i b_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^3 + b_i^3}{a_i b_i} + 3x + 3y.$$

Теперь оценим по неравенству Коши-Буняковского-Шварца для дробей:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3 + b_i^3}{a_i b_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{(\sum_{i=1}^n b_i)} + \frac{(\sum_{i=1}^n b_i)^2}{(\sum_{i=1}^n a_i)} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}.$$

Итого, складывая мы получаем

$$\sum_{i=1}^n \frac{(a_i + b_i)^3}{a_i b_i} \geq 3x + 3y + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{(x+y)^3}{xy}$$

Наименьшее возможное значение достигается, когда все неравенства обращаются в равенство. Для неравенству Коши-Буняковского-Шварца это происходит в случае $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, то есть в случае $a_1 = \dots = a_n = \frac{x}{n}$, а $b_1 = \dots, b_n = \frac{y}{n}$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	25	10	8	10	50	4	20	5	20	16
y	4	8	20	25	8	50	5	8	25	10
Ответ	243,89	72,9	137,2	171,5	487,78	787,32	156,25	54,925	182,25	109,85

Задача 5. (3 балла)

Дана трапеция $ABCD$, боковые стороны которой имеют длины $AB = a$, $CD = b$. Также известна длина диагонали $BD = d$.

Точка K на продолжении стороны AB за точку A такова, что $\angle BKD = \angle ADC$. Также оказалось, что AD — биссектриса $\angle BDK$.

Точка L на луче DA такова, что $\angle LKA = \angle CBD$.

Найдите длину DL .

Ответ: $\frac{bd}{a}$ или

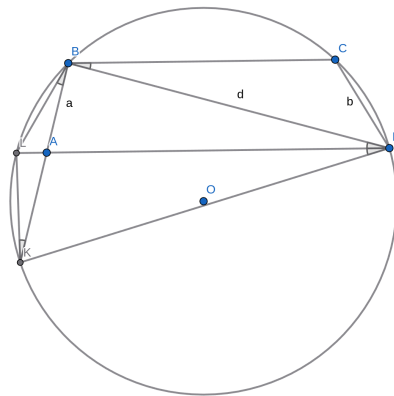
Решение:

Во-первых, $\angle BKD = \angle ADC$ по условию, $\angle ADC = 180^\circ - \angle BCD$ (как односторонние углов в трапеции), поэтому четырёхугольник $KBCD$ — вписанный.

Во-вторых, заметим, что точка L определена не однозначно: она может оказаться как на продолжении луча DA за точку L , так и на отрезке AD .

Разберём сначала первый случай.

Первый случай:



Поймём, что все пять отмеченных на рисунке угла равны: $\angle LKA = \angle CBD$ по условию, $\angle CBD = \angle BDL$ как накрест лежащий, $\angle BDL = \angle DLK$, так как DA биссектриса. Из равенства $\angle BDL = \angle LKA$ получаем, что точка L лежит на той же окружности, что и точки B , C , D и K . Отсюда $\angle LBK = \angle LDK$, как опирающийся на ту же дугу.

Кроме того, из равенства указанных выше углов также следует, что $BK = KL = CD = b$.

Способ 1. Теорема синусов:

Запишем три теоремы синусов.

$$\text{Для треугольника } BDL: \frac{DL}{BD} = \frac{\sin \angle DBL}{\sin \angle BLD}.$$

$$\text{Для треугольника } ABD: \frac{AB}{BD} = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BAD}.$$

$$\text{Для треугольника } BD: \frac{BD}{CD} = \frac{\sin \angle BCD}{\sin \angle CBD}.$$

Заметим, что $\angle CBD = \angle BDL = \angle BDA$; $\angle DBL = \angle DBA + \angle ABL = \angle DBA + \angle KBL = \angle DBA + \angle CBD = \angle ABC = 180^\circ - \angle BAD$, поэтому $\sin \angle DBL = \sin \angle BAD$; наконец, $\angle BLD = 180^\circ - \angle BCD$, поэтому их синусы также равны.

$$\text{Значит, произведение правых частей в теоремах синусов равно единице, поэтому } \frac{DL}{BD} \cdot \frac{AB}{BD} \cdot \frac{BD}{CD} = 1, \text{ откуда } DL = \frac{BD \cdot CD}{AB} = \frac{bd}{a}.$$

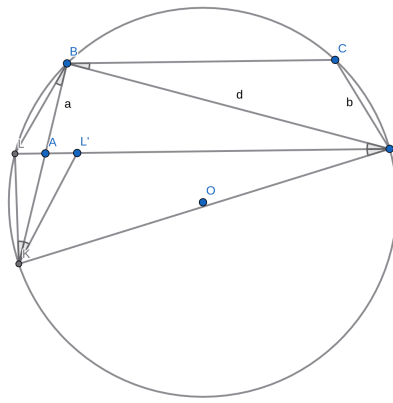
Способ 2. Теорема Птолемея.

$$\text{По теореме Птолемея для четырёхугольника } BDKL, DL = \frac{BD \cdot KL + BL \cdot DK}{BK}. \text{ Поскольку } BL = KL = CD = b, \text{ получаем } DL = b \cdot \frac{BD + DK}{BK} = b \cdot \frac{BD}{BK} \cdot \left(1 + \frac{DK}{BD}\right).$$

$$\text{По основному свойству биссектрисы для треугольника } KBD, \frac{DK}{BD} = \frac{AK}{AB}, \text{ поэтому } DL = b \cdot \frac{BD}{BK} \cdot \left(1 + \frac{AK}{AB}\right) = b \cdot \frac{BD}{BK} \cdot \frac{AB + AK}{AB} = b \cdot \frac{d}{BK} \cdot \frac{BK}{a} = \frac{bd}{a}.$$

Второй случай:

Поскольку мы будем пользоваться свойствами точки L из первого случая, лежащую на отрезке AD «версию» точки L назовём L' .



$\angle KBD$ и $\angle KLD$ опираются на одну дугу, поэтому равны, то есть $\angle ABD = \angle ALK$. $\angle BAD = \angle LAK$ вертикальные, поэтому треугольники BAD и LAK подобны, $AL = \frac{AB \cdot LK}{BD} = \frac{ab}{d}$. Значит, $AD = DL - AL = \frac{bd}{a} - \frac{ab}{d} = \frac{b(d^2 - a^2)}{ad}$.

Из того же самого подобия получаем $AK = AD \cdot \frac{LK}{BD} = AD \cdot \frac{b}{d}$.

Теперь заметим, что треугольник AKD подобен треугольнику $AL'K$ по двум углам, откуда $AL' = \frac{AK^2}{AD} = \frac{AD^2 \cdot \frac{b^2}{d^2}}{AD} = AD \cdot \frac{b^2}{d^2} = \frac{b(d^2 - a^2)}{ad} \cdot \frac{b^2}{d^2} = \frac{b^3(d^2 - a^2)}{ad^3}$.

Следовательно, $DL' = AD - AL' = AD \cdot \left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) = \frac{b(d^2 - a^2)}{ad} \cdot \frac{d^2 - b^2}{d^2} = \frac{b(d^2 - a^2)(d^2 - b^2)}{ad^3}$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	8	6	6	8	10	9	10	8	12	12
b	12	8	9	10	15	12	14	12	15	16
d	20	15	12	20	24	21	30	18	28	33
DL (Ответ 1)	30	20	18	25	36	28	42	27	35	44
AL	$\frac{16}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{27}{7}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{32}{9}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{48}{11}$
AL (прибл)	3,2	2,4	3	3,2	4,17	3,86	3,33	3,56	5,14	4,36
AD	$\frac{134}{5}$	$\frac{88}{5}$	$\frac{15}{1}$	$\frac{109}{5}$	$\frac{191}{6}$	$\frac{169}{7}$	$\frac{116}{3}$	$\frac{211}{9}$	$\frac{209}{7}$	$\frac{436}{11}$
AD (прибл)	26,8	17,6	15	21,8	31,83	24,14	38,67	23,44	29,86	39,64
AK	$\frac{402}{25}$	$\frac{704}{75}$	$\frac{45}{4}$	$\frac{545}{50}$	$\frac{2865}{144}$	$\frac{676}{49}$	$\frac{812}{45}$	$\frac{1266}{81}$	$\frac{3135}{196}$	$\frac{6976}{363}$
AK (прибл)	16,08	9,39	11,25	10,9	19,9	13,8	18,04	15,63	15,99	19,22
AL'	$\frac{1206}{125}$	$\frac{5632}{1125}$	$\frac{135}{16}$	$\frac{2725}{500}$	$\frac{42975}{3456}$	$\frac{2704}{343}$	$\frac{5684}{675}$	$\frac{7596}{729}$	$\frac{47025}{5488}$	$\frac{111616}{11979}$
AL' (прибл)	9,65	5,01	8,44	5,45	12,43	7,88	8,42	10,42	8,57	9,32
DL' (Ответ 2)	$\frac{2144}{125}$	$\frac{14168}{1125}$	$\frac{105}{16}$	$\frac{8175}{500}$	$\frac{67041}{3456}$	$\frac{5577}{343}$	$\frac{20416}{675}$	$\frac{9495}{729}$	$\frac{116831}{5488}$	$\frac{363188}{11979}$
DL' (прибл)	17,15	12,59	6,56	16,35	19,4	16,26	30,25	13,02	21,29	30,32

Задача 6. (3 балла)

На одной из клеток верхней строки клетчатого прямоугольника, стоит шахматный слон. Он начинает движение, за один ход перемещаясь на одну клетку по диагонали в одном и том же направлении. Достигнув клетки на стороне прямоугольника, слон меняет направление на 90° .

Через n ходов слон впервые вернулся на исходную клетку, ни разу не попав в угол многоугольника. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: Такое невозможно.

Решение (для общего случая).

Переформулируем задачу: давайте слон будет ходить не по клеткам, а по их центрам. Пусть наш прямоугольник имеет размер $(a+1) \times (b+1)$. Рассмотрим другой прямоугольник, границы которого проходят по центрам нижней и верхней строки и правого и левого столбца исходного прямоугольника. Отразим новый прямоугольник симметрично относительно всех его сторон, затем получившиеся прямоугольники также отразим, и так далее. Получим прямоугольную сетку, ячейками которой являются прямоугольники $a \times b$.

Соединим теперь центры клеток, на которых находился слон, отрезками. Назовём объединение этих отрезков *траекторией* слона. В нашей новой интерпретации, когда слон доходит до края доски и меняет направление, его траектория меняется под углом 90° , отражаясь от края доски. Таким образом, мы получаем классическую геометрическую задачу про отражения.

Вместо того, чтобы отразить траекторию слона от стороны нового треугольника под углом 90° , продлим её дальше по прямой в отражённом прямоугольнике. Будем продолжаться движение слона по прямой, попадая во всё новые и новые отражённые прямоугольники. Движение слона заканчивается, когда слон попадает в точку, являющуюся образом нескольких последовательных отражений исходной.

Введём систему координат с центром в левом верхнем углу нашего прямоугольника. Тогда исходная точка имеет координаты $(x, 0)$ где x — натуральное число. Точки, являющиеся образами нескольких последовательных отражений исходной, имеют вертикальную координату, делящуюся на $2a$, а горизонтальную $2ka \pm x$ или

С другой стороны, смещение нашего слона по вертикали за n ходов равно в точности n , откуда n делится на $2b$. Однако во всех вариантах $n = pq$, где p и q — нечётные простые числа. Значит, это невозможно.

Короткое решение.

Приведённый выше подход позволил бы решить задачу при любых начальных условиях. Для решения же данной задачи с нечётным n достаточно следующего соображения: за нечётное число ходов слон в принципе не может вернуться в исходную точку, так как каждый раз он сдвигается по горизонтали и вертикали на 1, значит, его суммарный сдвиг по каждой координате за n ходов будет нечётным, а для того, чтобы вернуться в исходную точку нужно одинаковое число раз сдвинуться вправо и влево.

Задача 7. (4 балла)(общий вид)

На конференции по теории графов собралось много учёных. Они выяснили следующие вещи:

- (1) У каждого из них ровно a знакомых на конференции.
- (2) У любых двух знакомых ровно b общих знакомых на конференции.
- (3) У любых двух незнакомых ровно c общих знакомых на конференции.

Сколькими способами можно посадить за круглый стол четверых учёных так, чтобы справа и слева от каждого сидели его знакомые?

(Порядок рассадки для данной четверки учёных важен и должен учитываться в ответе).

Ответ: $n(dc(c-1) + ab(b-1))$, где $d = \frac{a(a-b-1)}{c}$, $n = a + d + 1$.

Решение:

Найдём сначала общее количество учёных n . Рассмотрим какого-то одного учёного. У него есть a знакомых. У каждого из них также a знакомых, но среди этих a уже посчитаны b общих знакомых с первым учёным и сам первый учёный. Остаётся ещё $a - b - 1$ знакомый у каждого, итого $a(a - b - 1)$. В это число вошли все незнакомые с первым учёным люди, причём каждый ровно c раз благодаря третьему условию. Значит, всего получаем $n = 1 + a + \frac{a(a - b - 1)}{c}$ учёных.

У каждого из них при этом ровно $d = \frac{a(a - b - 1)}{c}$ незнакомых на конференции.

Теперь рассмотрим любой из интересующих нас способов. На первое место мы можем посадить любого человека. Напротив него также может сидеть любой из оставшихся.

Рассмотрим два случая: первый человек выбирается n способами. Незнакомого человека напротив можно выбрать d способами. Тогда оставшиеся два выбираются $c(c-1)$ способами так как мы знаем, сколько у первых двоих общих знакомых. Получаем $n \cdot d \cdot c(c-1)$ способов.

Во втором случае мы выбираем человека напротив из a знакомых первого человека, а дальше $b(b-1)$ способами выбираем их общих знакомых. Получаем всего $n \cdot a \cdot b(b-1)$ способов.

Полученные два числа необходимо сложить для получения ответа.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	a	b	c	n (число учёных)	d (число незнакомых)	1 слагаемое	2 слагаемое	
1	81	60	54	112	30	9616320	32114880	41731200
2	78	55	66	105	26	11711700	24324300	36036000
3	72	51	45	105	32	6652800	19278000	25930800
4	54	26	27	109	54	4131972	3825900	7957872
5	44	19	16	111	66	1758240	1670328	3428568
6	66	37	42	111	44	8410248	9758232	18168480
7	56	27	28	113	56	4783968	4442256	9226224
8	36	15	9	117	80	673920	884520	1558440
9	80	52	60	117	36	14910480	24822720	39733200
10	54	21	27	119	64	5346432	2698920	8045352

Замечание Говоря в терминах теории графов, все эти графы реально существуют. Они называются *сильно регулярными графами*, их можно найти <https://aeb.win.tue.nl/graphs/srg/srgtab101-150.html>.

Задача 8. (5 баллов)(общий вид)

Обозначим за $d(n)$ число натуральных делителей числа n (включая единицу и само число).

Найдите все такие n , что $n = 3p \cdot d(n)$ (где p — простое число, свой для каждого варианта).

Ответ: $72p$.

Решение:

Очевидно, n делится на 3 и на p . Разложим n в произведение степеней простых чисел: $n = 3^l p^k p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$. Тогда $d(n) = (l+1)(k+1)(k_1+1) \dots (k_m+1)$. Разделив n на $3p \cdot d(n)$ получим

$$\frac{3^{l-1}}{l+1} \cdot \frac{p^{k-1}}{k+1} \cdot \frac{p_1^{k_1}}{k_1+1} \dots \frac{p_m^{k_m}}{k_m+1} = 1.$$

Заметим, что все дроби в этом произведении, кроме первых двух, гарантированно не меньше 1 (равенство достигается только в случае $\frac{2^1}{1+1} = 1$). Тогда как минимум одна из первых двух дробей не превосходит единицы, как и их произведение.

Вторая дробь не превосходит единицы только при $k = 1$, поскольку во всех вариантах $p \geq 7$. В этом случае она равна $\frac{1}{2}$. Первая же дробь может быть равна как $\frac{1}{2}$ при $l = 1$, так и $\frac{3^{2-1}}{2+1} = 1$ при $l = 2$. При этом при $k > 1$ вторая дробь составляет как минимум $\frac{p}{3}$, а при $l > 2$ первая дробь составляет как минимум $\frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$. И то и другое больше двух, что делает произведение дробей больше единицы.

Осталось разобрать два случая: $k = l = 1$ и $k = 1, l = 2$.

В первом случае и первая, и вторая дробь равны $\frac{1}{2}$, а их произведение составляет $\frac{1}{4}$. Значит, произведение остальных должно быть равно 4. Множитель 2 в числителе может получиться только одно из оставшихся простых чисел равно 2. Рассмотрим дроби вида $\frac{2^{k_1}}{k_1+1}$, которые не превосходят 4: это $\frac{2^1}{1+1} = 1$, $\frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$, $\frac{2^3}{3+1} = 2$, $\frac{2^4}{4+1} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$. Нам устраивают только дроби, у которых после сокращения в числителе остаётся хотя бы 4. Если мы используем дробь $\frac{4}{3}$, нам понадобится ещё один множитель 3 в числителе, которого у нас нет, если же возьмём $\frac{16}{5}$, нам понадобится ещё дробь с 5 в числителе, то есть минимум $\frac{5}{2}$, что уже даёт слишком большое произведение.

Во втором случае первая дробь равна $\frac{1}{2}$, а вторая равна 1. Значит, произведение остальных должно быть равно 2. Мы можем добавить к ним только $\frac{2^3}{3+1} = 2$ и получить единицу в качестве произведения.

Значит, $n = 3^l p^k 2^3 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot p = 72p$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6
p	11	13	17	19	7	23
$3p$ (число в условии)	33	39	51	57	21	69
	792	936	1224	1368	504	1656