

11 класс

Задачи и решения

Данный файл содержит печатные версии задач. Онлайн-версии могут незначительно отличаться в формулировках. В частности, отсюда убраны все рекомендации по вводу ответов в систему.

Все задачи даны в общем виде, данные по вариантам представлены в соответствующих таблицах.

Задача 1. (2 балла) (общий вид)

Многочлен $P(x) - a$ и многочлен $P(P(x) - b)$ имеют как минимум один общий корень.

Докажите, что число $a - b$ является корнем многочлена $P(x)$.

Доказательство:

Пусть x_0 — общий корень двух данных многочленов. Тогда, во-первых, $P(x_0) = a$, а, во вторых, $P(P(x_0) - b) = 0$. Но $P(P(x_0) - b) = P(a - b)$. Утверждение задачи доказано.

Таблица с параметрами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	8	7	8	3	3	3	8	8	5	7
b	5	8	5	7	5	8	4	5	3	6
$a - b$	3	-1	3	-4	-2	-5	4	3	2	1

Задача 2. (3 балла) (Общий вид)**Варианты 1–5.**

Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. В начале игры на доске написан многочлен $x^{2n+1} + x^{2n} + \dots + x^2 + x + 1$. В свой ход игрок может либо заменить многочлен на его производную, либо, если в многочлене больше одного одночлена, стереть с доски один из одночленов.

Если при дифференцировании какого-то одночлена получается в 0, он на доске не пишется.

Игра заканчивается, когда на доске остаётся число. Петя хочет, чтобы это число было как можно больше, а Вася — чтобы как можно меньше.

Какое число останется на доске при правильной игре?

Ответ: $(n + 1)!$

Решение:

Будем говорить, что одночлен ax^k при дифференцировании превращается в одночлен akx^{k-1} (или исчезает, если получившийся одночлен равен 0). Результат игры зависит от того, многократным дифференцированием какого одночлена получена итоговая константа. При этом на каждом ходу исчезает не более одного одночлена, поэтому игра продлится минимум $2n + 1$ ход (изначально одночленов $2n + 2$).

Петина стратегия — всё время дифференцировать многочлен. Петя начинает первый, он сделает минимум $n + 1$ ход и уничтожит все одночлены, изначальная степень которых была от 0 до n включительно. Таким образом, вне зависимости от действий соперника, Петя гарантирует, что оставшийся одночлен будет иметь изначальную степень не меньше $n + 1$, а значит, его итоговое значение после превращения в константу будет не меньше $(n + 1)!$.

Васина стратегия всё время стирать старший член многочлена. Вася сделает не менее n ходов и уничтожит все одночлены, изначальная степень которых была больше $n + 1$. Таким образом, вне зависимости от действий соперника, Вася гарантирует, что оставшийся одночлен будет иметь изначальную степень не больше $n + 1$, а значит, его итоговое значение после превращения в константу будет не больше $(n + 1)!$.

Таблица с параметрами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5
n	1010	1011	1012	1013	1014
Степень	2021	2023	2025	2027	2029
Ответ	1011!	1012!	1013!	1014!	1015!

Замечание: В качестве стратегии для Пети в этих вариантах также подходит удаление младших членов.

Варианты 6–10.

Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. В начале игры на доске написан многочлен $x^{2n+1} + x^{2n} + \dots + x^2 + x + 1$. В свой ход игрок может либо заменить многочлен на его производную, либо, если в многочлене больше одного одночлена, стереть с доски один из одночленов.

Если при дифференцировании какого-то одночлена получается в 0, он на доске не пишется.

Игра заканчивается, когда на доске остаётся число. Вася хочет, чтобы это число было как можно больше, а Петя — чтобы как можно меньше.

Какое число останется на доске при правильной игре?

Ответ: $n!$

Решение:

Будем говорить, что одночлен ax^k при дифференцировании превращается в одночлен akx^{k-1} (или исчезает, если получившийся одночлен равен 0). Результат игры зависит от того, многократным дифференцированием какого одночлена получена итоговая константа. При этом на каждом ходу исчезает не более одного одночлена, поэтому игра продлится минимум $2n + 1$ ход (изначально одночленов $2n + 2$).

Петина стратегия всё время стирать старший член многочлена. Петя начинает первый, он сделает не менее $n + 1$ хода и уничтожит все одночлены, изначальная степень которых была больше n . Таким образом, вне зависимости от действий

соперника, Петя гарантирует, что оставшийся одночлен будет иметь изначальную степень не больше n , а значит, его итоговое значение после превращения в константу будет не больше $n!$.

Васина стратегия — всё время дифференцировать многочлен. Вася начинает второй, он сделает минимум n ходов и уничтожит все одночлены, изначальная степень которых была от 0 до $n-1$ включительно. Таким образом, вне зависимости от действий соперника, Вася гарантирует, что оставшийся одночлен будет иметь изначальную степень не меньше n , а значит, его итоговое значение после превращения в константу будет не меньше $n!$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	6	7	8	9	10
n	1010	1011	1012	1013	1014
Степень	2021	2023	2025	2027	2029
Ответ	1010!	1011!	1012!	1013!	1014!

Замечание: В качестве стратегии для Васи в этих вариантах также подходит удаление младших членов.

Задача 3. (2 балла)(общий вид)

Сфера S проходит через вершины A , B и C и середины рёбер AD , BD и CD тетраэдра $ABCD$. Высота тетраэдра, опущенная из точки D , имеет длину $2h$, а радиус описанной окружности треугольника ABC составляет $2 \cdot \sqrt{k}$.

Найдите радиус сферы S .

Ответ:

Решение:

Заметим, что треугольник, образованный указанными серединами рёбер (назовём его $A_1B_1C_1$), подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Значит, и радиус его описанной окружности в два раза меньше, и составляет $\sqrt{k}$.

Центры описанных окружностей этих треугольников назовём O_1 и O соответственно, центр сферы назовём O' . Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и их пересечения со сферой — это описанные окружности треугольников, поэтому точки O' , O и O_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной этим плоскостями. Значит, $OO_1 = h$ (расстояние между плоскостями, равное половине высоты тетраэдра).

Пусть R — искомый радиус сферы, $OO' = |x|$, где x будем считать отрицательным, если точка O' лежит по ту же сторону, что и O . Тогда из теоремы Пифагора для треугольников $O'O_1A_1$ и $O'OA$ получим следующие равенства:

$$R^2 = (x + h)^2 + (\sqrt{k})^2 \text{ и } R^2 = x^2 + (2 \cdot \sqrt{k})^2.$$

Приравняв их правые части, раскрыв скобки и сократив x^2 , получаем $2xh + h^2 + k = 4k$, откуда $x = \frac{3k - h^2}{2h}$.

Теперь подставив x в равенство $R^2 = x^2 + (2 \cdot \sqrt{k})^2$, найдём

$$R = \sqrt{x^2 + 4k} = \sqrt{\left(\frac{3k - h^2}{2h}\right)^2 + 4k}.$$

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	120	90	36	50	72	68	110	126	36	40
k	5600	6600	504	1500	2016	2040	5720	8400	1056	960
x	10	65	3	20	6	11	23	37	26	16
Ответ	150	175	45	80	90	91	153	187	70	64

Замечание: Поскольку тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ гомотетичны с центром в точке D , точка D лежит на одной прямой с точками O и O_1 (а значит, и с O'), поэтому в данном тетраэдре высота проходит через центр описанной окружности треугольника ABC . Впрочем, в решении мы этого факта не использовали.

Задача 4. (3 балла)(Общий вид)

Антон выбрал несколько n -элементных множеств натуральных чисел. Оказалось, что любые два множества имеют хотя бы один общий элемент, но никакие четыре не имеют общего элемента.

Докажите, что выбранных множеств не более $2n$.

Доказательство:

Рассмотрим любое из выбранных множеств, назовём его A . Каждое из оставшихся имеет с ним как минимум один общий элемент, при этом ни один из элементов множества A не может принадлежать больше чем двум другим множествам, поэтому остальных множеств не более $2n$, а вместе с A — не более $2n + 1$.

Осталось доказать, что число множеств не может составлять в точности $2n + 1$.

Предположим, это так. Значит, каждые два множества пересекаются в точности по одному элементу и каждый элемент принадлежит ровно трём множествам.

Поэтому мы можем посчитать общее число элементов во всех множествах: надо размер множества умножить на количество выбранных множеств и поделить на 3, поскольку каждый элемент принадлежит ровно трём множествам.

Получается $\frac{n \cdot (2n + 1)}{3}$.

Однако, числа в задаче подобраны так, что ни n , ни $2n + 1$ на три не делятся (каждое n в каждом из вариантов даёт остаток 2 при делении на 3), поэтому предполагаемая ситуация невозможна.

Таблица с параметрами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	80	95	65	110	125	170	140	500	200	800
$2n$	160	190	130	220	250	340	280	1000	400	1600
$2n + 1$	161	191	131	221	251	341	281	1001	401	1601

Задача 5. (4 балла)(общий вид)

Попарно различные натуральные числа $x_1, \dots, x_n$ таковы, что для каждого двух из них одно является степенью другого с натуральным показателем. Найдите наименьшее возможное значения выражения

$$\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \log_{x_3} x_4 + \dots + \log_{x_{n-1}} x_n + \log_{x_n} x_1$$

Ответ: $2n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Решение:

Приведём сначала пример, для которого достигается это число: x_1 — любое натуральное число, большее 1, $x_2 = x_1^2$, $x_3 = x_2^2, \dots, x_n = x_{n-1}^2 = x_1^{2^{n-1}}$.

Переупорядочим наши числа по возрастанию: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$. Тогда $a_2 = a_1^{k_1}$, $a_3 = a_2^{k_2}, \dots, a_n = a_{n-1}^{k_{n-1}}$. Соответственно, $a_3 = a_1^{k_1 k_2}, \dots, a_n = a_1^{k_1 \dots k_{n-1}}$.

К сожалению, мы не можем сказать, что $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, потому что при это нарушается общность: соседние по возрастанию элементы не обязательно идут подряд.

Однако, поскольку от циклического сдвига переменных ничего не поменяется, мы можем считать, что $x_1 = a_1$. Выделим среди чисел $x_1, \dots, x_n$ самую длинную возрастающую последовательность. Если точнее $b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3$ — первый из элементов $x_3, \dots, x_n$, больший x_2 , b_4 — первый из элементов, следующих за b_3 , больший b_3 и так далее. Последним элементом этой подпоследовательности будет $b_m = a_n$ — наибольшее среди всех чисел.

Рассмотрим в нашей сумме логарифмов только те логарифмы, аргументами которых являются числа $b_2, \dots, b_m$. На самом деле, это все логарифмы из искомой суммы, большие единицы. Основания этих логарифмов назовём $c_2, \dots, c_m$ и запишем их сумму:

$$\log_{c_2} b_2 + \log_{c_3} b_3 + \dots + \log_{c_m} b_m \geq \log_{b_1} b_2 + \log_{b_2} b_3 + \dots + \log_{b_{m-1}} b_m$$

Это неравенство верно, поскольку $c_i \leq b_{i-1}$ из определения b_i : b_i — первый после b_{i-1} элемент последовательности x_k , больший, чем b_{i-1} , значит, все элементы, находящиеся в последовательности x_k , между b_{i-1} и b_i (если они есть) меньше, чем b_i .

Далее, $\log_{b_1} b_2 = k_1 \cdot \dots \cdot k_{j_1}$, $\log_{b_2} b_3 = k_{j_1+1} \cdot \dots \cdot k_{j_2}$, $\dots$, $\log_{b_{m-1}} b_m = k_{j_{m-2}} \cdot \dots \cdot k_n$.

Все k_i — натуральные числа, не меньшие 2, поэтому для любого их набора произведение не меньше суммы. Значит, $\log_{c_2} b_2 + \log_{c_3} b_3 + \dots + \log_{c_m} b_m \geq k_1 + \dots + k_n$, а вся сумма из условия тем более не меньше $k_1 + \dots + k_n$.

При этом если какое-то из k_i больше 2, сумма логарифмов получается больше, чем в приведённом примере. Значит, если существует какой-то меньший пример, все k_i для него также должны быть равны 2 и $\log_{c_2} b_2 + \log_{c_3} b_3 + \dots + \log_{c_m} b_m \geq k_1 + \dots + k_n = 2(n-1)$.

Однако из этого не следует автоматические, что все логарифмы из этой суммы равны 2, поскольку $2 \cdot 2 = 2 + 2$ и в этом месте некоторые из наших неравенство обращаются в равенства. Значит, в нашей сумме логарифмов, больших единицы, есть только двойки и четвёрки.

Кроме того, в искомой сумме есть как минимум один логарифм, меньший единицы — это логарифм по самому большому основанию. Он точно не меньше, чем $\log_{a_n} a_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$, что доказывает оценку.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	90	100	120	150	200	250	300	1000	80	500
Ответ:	$178\frac{1}{289}$	$198\frac{1}{299}$	$238\frac{1}{2119}$	$298\frac{1}{2149}$	$398\frac{1}{2199}$	$498\frac{1}{2249}$	$598\frac{1}{2299}$	$1998\frac{1}{2999}$	$158\frac{1}{279}$	$998\frac{1}{2499}$

Задача 6. (4 балла)(общий вид)

Найдите все пары чисел (p, n) , где p — простое, а n — целое и при этом $p^4 + a = n^2 + 5pn$.

В ответе укажите значения n . Если их несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: см. таблицу с параметрами и ответами

Решение:

Согласно малой теореме Ферма, если $p \neq 5$, число p^4 даёт остаток 1 при делении на 5. (Также можно убедиться в этом простым перебором остатков). Число a в любом из вариантов заканчивается на 1, то есть также даёт остаток 1. $5pn$ делится на p , значит, если $p \neq 5$, мы получаем, что n^2 даёт остаток 2 при делении на 5, что невозможно.

Осталось разобрать случай $p = 5$. В этом случае нам надо решить квадратное уравнение $n^2 + 25n - 625 - a = 0$, корнями которого являются числа $n_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{3125 + 4a}}{2}$. Числа в условии подобраны так, чтоб все эти уравнения имели по два решения.

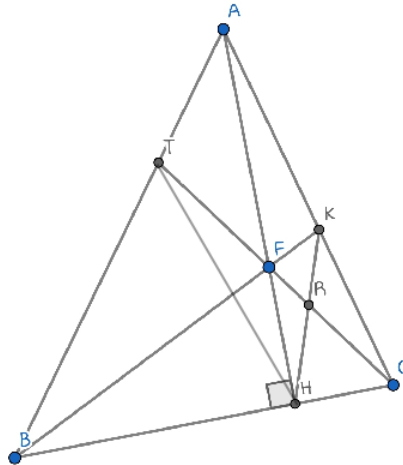
Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	211	341	551	701	941	1111	1381	1571	1871	2081
D	3969	4489	5329	5929	6889	7569	8649	9409	10609	11449
$\sqrt{D}$	63	67	73	77	83	87	93	97	103	107
Ответ 1:	-44	-46	-49	-51	-54	-56	-59	-61	-64	-66
Ответ 2:	19	21	24	26	29	31	34	36	39	41

Задача 7. (4 балла)

В треугольнике ABC проведена высота AH . На ней отмечена точка F . Через точку F проведены отрезки BK , CT к сторонам треугольника, а HK пересекает CT в точке R . Известно, что $BT = \frac{a(a+b)}{a-b}$, $TF = a$, $FR = b$. Найти длину AB .

Ответ: $\frac{2a^2}{a-b}$.



Докажем сначала, что HA — биссектриса $\angle THK$.

Это доказывается с помощью теоремы Чевы:

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{CK}{KA} \cdot \frac{AT}{TB} \cdot \frac{BH}{HC} = \frac{S_{HKC}}{S_{HKA}} \cdot \frac{S_{HTA}}{S_{HTB}} \cdot \frac{BH}{HC} = \\
 &= \frac{HC \cdot HK \cdot \sin \angle KHC}{HA \cdot HK \cdot \sin(90^\circ - \angle KHC)} \cdot \frac{HA \cdot HT \cdot \sin(90^\circ - \angle BHT)}{HT \cdot HB \cdot \sin \angle BHT} \cdot \frac{BH}{HC} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \angle KHC}{\operatorname{tg} \angle BHT} \Rightarrow \angle KHC = \angle BHT.
 \end{aligned}$$

(Или сразу следует из теоремы об изогоналях.)

Далее, так как HC — внешняя биссектриса $\angle THR$, то $\frac{CR}{TC} = \frac{FR}{TF}$, то есть $\frac{TC - a - b}{TC} = \frac{b}{a} \Rightarrow 1 - \frac{a+b}{TC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a+b}{TC} = \frac{a-b}{a} \Rightarrow TC = \frac{a(a+b)}{a-b}$.

Далее замечаем, что $BT = TC$. Тогда $\angle BAN = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle TCB = \angle HFC = \angle AFT$, значит $AT = TF = a$.

Следовательно, $AB = BT + TA = \frac{a(a+b)}{a-b} + a = \frac{2a^2}{a-b}$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$TF = a$	7	5	6	8	6	7	10	8	9	8
$FR = b$	6	4	4	4	5	5	5	6	6	7
BT	91	45	30	24	66	42	30	56	45	120
Ответ:	98	50	36	32	72	49	40	64	54	128

Задача 8. (4 балла)

В Нонквинтляндии n городов, некоторые из которых соединены дорогами. Путешественник обнаружил, что невозможно проехать по пяти разным дорогами и вернуться в исходный город. Докажите, что в стране не более m дорог.

Каждая дорога соединяет два города. Два города могут быть соединены не более, чем одной дорогой. По каждой дороге можно двигаться в любом из двух направлений. Путешественник может двигаться только по дорогам.

Доказательство:

Заметим сначала, что во всех вариантах $m = \frac{n(n-1)}{3}$.

Будем называть замкнутый маршрут из пяти дорог, существование которого запрещено условием, 5-циклом.

Докажем сначала, что если мы рассмотрим какие-либо шесть городов, между ними будет проведено не более 10 дорог из возможных 15. Предположим противное: пусть между какими-то шестью городами проведено не менее 11 дорог. Тогда среди этих шести городов и соединяющих их дорог найдём 5-цикл, существование которого запрещено условием.

Нам достаточно доказать, что мы сможем найти 5-цикл, если дорог ровно 11. Действительно, если дорог больше 11, удалим лишние и докажем, что цикл из 5-цикл среди оставшихся дорог всё равно найдётся.

Для удобства, если какие-то два города не соединены дорогой, будем говорить, что они соединены антидорогой. Таким образом, мы хотим доказать, что мы сможем найти 5-цикл, если между шестью городами проведены ровно четыре антидороги.

Какие-то две антидороги точнов выходят из одного города. Исключим его и рассмотрим оставшиеся пять городов. Пронумеруем их числами от 1 до 5. Между этими городами не более двух антидорог. Опять же, достаточно найти 5-цикл в ситуации, когда этих антидорог ровно две, в противном случае он найдётся и подавно.

Есть две возможных ситуации: когда эти антидороги имеют общий конец, и когда не имеют.

В первом случае без ограничения можно считать, что антидороги соединяют город 1 с городами 2 и 3. Тогда мы можем найти следующий 5-цикл: 1-4-2-3-5-1.

Во втором случае можно считать, у наши антидороги соединяют город 1 с городом 2, а город 3 с городом 4. Тогда мы сможем найти такой 5-цикл: 1-3-5-2-4-1

Мы доказали, что среди любых 5 городов проведено не более 10 дорог из 15, то есть максимум $\frac{2}{3}$ от из всех возможных дорог. Поскольку каждая пара городов с проведённой между ними дорогой или антидорогой входит в равное число таких шестёрок, поэтому общее количество дорог также составляет не более $\frac{2}{3}$ от максимально возможного, то есть максимум $\frac{2}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{3}$.

Докажем это чуть более строго. В каждой шестёрке городов не более 10 дорог. Всего этих шестёрок C_n^6 . Итого получаем $10C_n^6$ дорог, однако, каждая из них посчитана несколько раз. А именно, к каждой паре городов можно подобрать ещё 4 города C_{n-2}^4 способами, значит, именно столько раз мы посчитали каждую дорогу.

Таким образом, всего дорог не более $\frac{10C_n^6}{C_{n-2}^4} = \frac{10 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720}}{\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{24}} = \frac{n(n-1)}{3}$.

Таблица с параметрами и по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число городов (n)	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700	3000	450
Ограничение (m)	119800	269700	479600	749500	1079400	1469300	1919200	2429100	2999000	67350