

7 класс

Задачи и решения

Данный файл содержит печатные версии задач. Онлайн-версии могут незначительно отличаться в формулировках. В частности, отсюда убраны все рекомендации по вводу ответов в систему.

Задача 1. (2 балла)

Вариант 1. На конкурсе шесть судей выставляют свои оценки (целые неотрицательные числа), затем самая большая и самая маленькая оценки отбрасываются, и итоговая оценка участника является суммой оставшихся четырёх оценок. Если самых больших оценок несколько, отбрасывается только одна из них, аналогичное верно и для самой маленькой оценки.

Участник получил от шести судей в сумме 60 баллов. Какое наибольшее число баллов у него могло оказаться после отбрасывания самой большой и самой маленькой оценки?

Ответ: 48

Решение:

Пример: Значение 48 достигается, когда участник получил от пяти судей оценку 12, а от последнего — оценку 0. В этом случае после отбрасывания оценок 0 и 12 у участника остаётся $4 \cdot 12 = 48$ баллов.

Оценка: Больше 48 баллов итоговая оценка быть не может, так как отброшенная наибольшая оценка должна быть не меньше среднего арифметического четырёх оставшихся. Если участник в итоге получил больше 48 баллов, среднее арифметическое четырёх оставшихся не отброшенными оценок составляет больше, чем $48 : 4 = 12$, а значит вместе эти пять оценок дают уже больше, чем $48 + 12 = 60$. Поскольку отброшенная наименьшая оценка неотрицательна, сумма всех шести оценок также больше 60, что противоречит условию.

Вариант 2. На конкурсе семь судей выставляют свои оценки (целые неотрицательные числа), затем самая большая и самая маленькая оценки отбрасываются, и итоговая оценка участника является суммой оставшихся пяти оценок. Если самых больших оценок несколько, отбрасывается только одна из них, аналогичное верно и для самой маленькой оценки.

Участник получил от семи судей в сумме 60 баллов. Какое наибольшее число баллов у него могло оказаться после отбрасывания самой большой и самой маленькой оценки?

Ответ: 50

Решение:

Пример: Значение 50 достигается, когда участник получил от шести судей оценку 10, а от последнего — оценку 0. В этом случае после отбрасывания оценок 0 и 10 у участника остаётся $5 \cdot 10 = 50$ баллов.

Оценка: Больше 50 баллов итоговая оценка быть не может, так как отброшенная наибольшая оценка должна быть не меньше среднего арифметического пяти оставшихся. Если участник в итоге получил больше 50 баллов, среднее арифметическое четырёх оставшихся не отброшенными оценок составляет больше, чем $50 : 5 = 10$, а значит вместе эти пять оценок дают уже больше, чем $50 + 10 = 60$. Поскольку отброшенная наименьшая оценка неотрицательна, сумма всех шести оценок также больше 60, что противоречит условию.

Вариант 3. На конкурсе пять судей выставляют свои оценки (целые неотрицательные числа), затем самая большая и самая маленькая оценки отбрасываются, и итоговая оценка участника является суммой оставшихся трёх оценок. Если самых больших оценок несколько, отбрасывается только одна из них, аналогичное верно и для самой маленькой оценки.

Участник получил от пяти судей в сумме 60 баллов. Какое наибольшее число баллов у него могло оказаться после отбрасывания самой большой и самой маленькой оценки?

Ответ: 45

Решение:

Пример: Значение 45 достигается, когда участник получил от четырёх судей оценку 15, а от последнего — оценку 0. В этом случае после отбрасывания оценок 0 и 15 у участника остаётся $3 \cdot 15 = 45$ баллов.

Оценка: Больше 50 баллов итоговая оценка быть не может, так как отброшенная наибольшая оценка должна быть не меньше среднего арифметического пяти оставшихся. Если участник в итоге получил больше 50 баллов, среднее арифметическое четырёх оставшихся не отброшенными оценок составляет больше, чем $50 : 5 = 10$, а значит вместе эти пять оценок дают уже больше, чем $50 + 10 = 60$. Поскольку отброшенная наименьшая оценка неотрицательна, сумма всех шести оценок также больше 60, что противоречит условию.

Задача 2. (2 балла)

Вариант 1. В филиале корпорации работали начальник и 9 подчинённых. Зарплата начальника была вдвое больше средней зарплаты подчинённых. При очередном повышении зарплаты начальник филиала отчитался о повышении средней зарплаты по филиалу на 20%, при этом средняя зарплата подчинённых выросла только на 10%.

На сколько процентов выросла зарплата начальника?

Ответ: На 65%.

Решение: Предположим, подчинённые получали в среднем $10x$ рублей каждый, тогда начальник получал $20x$ рублей. Общая сумма всех зарплат составляла $9 \cdot 10x + 20x = 110x$.

После повышения суммарная зарплата подчинённых составила $90x \cdot 1,1 = 99x$, а общая зарплата всех сотрудников филиала увеличилась до $110x \cdot 1,2 = 132x$. Значит, зарплата начальника составила $132x - 99x = 33x$, что составляет 65% от его изначальной зарплаты.

Значит, зарплата начальника повысилась на 65%.

Вариант 2. В филиале корпорации работали начальник и 19 подчинённых. Зарплата начальника была вдвое больше средней зарплаты подчинённых. При очередном повышении зарплаты начальник филиала отчитался о повышении средней зарплаты по филиалу на 20%, при это средняя зарплата подчинённых выросла только на 10%.

На сколько процентов выросла зарплата начальника?

Ответ: На 115%.

Решение: Предположим, подчинённые получали в среднем $10x$ рублей каждый, тогда начальник получал $20x$ рублей, Общая сумма всех зарплат составляла $19 \cdot 10x + 20x = 210x$.

После повышения суммарная зарплата подчинённых составила $190x \cdot 1,1 = 209x$, а общая зарплата всех сотрудников филиала увеличилась до $210x \cdot 1,2 = 252x$. Значит, зарплата начальника составила $252x - 209x = 43x$, что составляет 215% от его изначальной зарплаты.

Значит, зарплата начальника повысилась на 115%.

Вариант 3. В филиале корпорации работали начальник и 24 подчинённых. Зарплата начальника была вдвое больше средней зарплаты подчинённых. При очередном повышении зарплаты начальник филиала отчитался о повышении средней зарплаты по филиалу на 20%, при это средняя зарплата подчинённых выросла только на 10%.

На сколько процентов выросла зарплата начальника?

Ответ: На 140%.

Решение: Предположим, подчинённые получали в среднем $10x$ рублей каждый, тогда начальник получал $20x$ рублей, Общая сумма всех зарплат составляла $24 \cdot 10x + 20x = 260x$.

После повышения суммарная зарплата подчинённых составила $240x \cdot 1,1 = 264x$, а общая зарплата всех сотрудников филиала увеличилась до $260x \cdot 1,2 = 312x$. Значит, зарплата начальника составила $312x - 264x = 48x$, что составляет 240% от его изначальной зарплаты.

Значит, зарплата начальника повысилась на 140%.

Задача 3. (3 балла)

Вариант 1. В прямоугольнике $ABCD$ выполняются равенства $AB = CD = 4$, $AD = BC = 5$. Точка K на отрезке AD такова, что $AK = 1$. Точка L на отрезке CD такова, что $DL = 1$.

Пользуясь тем, что сумма углов треугольника равна 180° , найдите $\angle KBL$.

Ответ: 45° .

Решение: $DK = AD - AK = 5 - 1 = 4$. Получается $AB = DK = 4$, $AK = DL = 1$, $\angle BAK = \angle KDL = 90^\circ$, откуда $\triangle BAK = \triangle KDL$.

Значит, $BK = KL$ и треугольник BKL равнобедренный.

Заметим, что $\angle BKL = 180^\circ - \angle AKB - \angle DKL = 180^\circ - \angle DLK - \angle DKL = \angle KDL = 90^\circ$. (Первое равенство верно, поскольку $\angle BKL$, $\angle AKB$ и $\angle DKL$ в сумме образуют развёрнутый, второе следует из доказанного выше равенства треугольников, а третье из того, что сумма углов треугольника равна 180°)

Значит, треугольник BKL равнобедренный с углом $\angle BKL = 90^\circ$, откуда остальные два угла этого треугольника равны по 45° .

Вариант 2. В прямоугольнике $ABCD$ выполняются равенства $AB = CD = 6$, $AD = BC = 5$. Точка K на отрезке AB такова, что $AK = 1$. Точка L на отрезке BC такова, что $BL = 1$.

Пользуясь тем, что сумма углов треугольника равна 180° , найдите $\angle KDL$.

Ответ: 45° .

Решение: $BK = AB - AK = 6 - 1 = 5$. Получается $AD = BK = 4$, $AK = BL = 1$, $\angle DAK = \angle KBL = 90^\circ$, откуда $\triangle DAK = \triangle KBL$.

Значит, $DK = KL$ и треугольник DKL равнобедренный.

Заметим, что $\angle DKL = 180^\circ - \angle AKD - \angle BKL = 180^\circ - \angle BLK - \angle BKL = \angle KBL = 90^\circ$. (Первое равенство верно, поскольку $\angle DKL$, $\angle AKD$ и $\angle BKL$ в сумме образуют развёрнутый, второе следует из доказанного выше равенства треугольников, а третье из того, что сумма углов треугольника равна 180°)

Значит, треугольник BKL равнобедренный с углом $\angle DKL = 90^\circ$, откуда остальные два угла этого треугольника равны по 45° .

Вариант 3. В прямоугольнике $ABCD$ выполняются равенства $AB = CD = 7$, $AD = BC = 5$. Точка K на отрезке CD такова, что $CK = 2$. Точка L на отрезке AD такова, что $DL = 2$.

Пользуясь тем, что сумма углов треугольника равна 180° , найдите $\angle KBL$.

Ответ: 45° .

Решение: $DK = CD - CK = 7 - 2 = 5$. Получается $CB = DK = 5$, $CK = DL = 2$, $\angle BCK = \angle KDL = 90^\circ$, откуда $\triangle BCK = \triangle KDL$.

Значит, $BK = KL$ и треугольник BKL равнобедренный.

Заметим, что $\angle BKL = 180^\circ - \angle CKB - \angle DKL = 180^\circ - \angle DLK - \angle DKL = \angle KDL = 90^\circ$. (Первое равенство верно, поскольку $\angle BKL$, $\angle CKB$ и $\angle DKL$ в сумме образуют развёрнутый, второе следует из доказанного выше равенства треугольников, а третье из того, что сумма углов треугольника равна 180°)

Значит, треугольник BKL равнобедренный с углом $\angle BKL = 90^\circ$, откуда остальные два угла этого треугольника равны по 45° .

Задача 4. (3 балла)

Вариант 1. У Алисы и Боба есть прут длиной один метр. С помощью этого прута они играют в игру, первой ходит Алиса. В свой ход игрок может сломать одну из имеющихся палочек на две части меньшего размера. Игра заканчивается, когда остаётся ровно 125 палочек.

Алиса хочет, чтобы из каких-то трёх палочек в конце игры можно было составить треугольник, Боб хочет ей помешать. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Алиса.

Решение: Приведём выигрышную стратегию для Алисы.

Первым ходом Алиса ломает прут пополам. У неё получаются две палочки одинаковой длины. Каждым своим следующим ходом Алиса будет добиваться того, чтобы все имеющиеся палочки разбивались на пары палочек одинаковой длины. Для этого она будет брать палочку той же длины, что только что сломал Боб и делить её на две палочки точно так же, как он.

После последнего хода Алисы остаётся 62 пары палочке. Боб своим последним ходом ломает одну из палочек, но 61 пара палочек всё ещё остаётся.

На самом деле, даже двух пар равных палочек достаточно, чтобы получить треугольник. Действительно, рассмотрим пару самых длинных палочек. Мы можем составить треугольник используя эту пару и любую палочку меньшей длины.

Вариант 2. У Алисы и Боба есть прут длиной один метр. С помощью этого прута они играют в игру, первой ходит Алиса. В свой ход игрок может сломать одну из имеющихся палочек на две части меньшего размера. Игра заканчивается, когда остаётся ровно 99 палочек.

Алиса хочет, чтобы из каких-то трёх палочек в конце игры можно было составить треугольник, Боб хочет ей помешать. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Алиса.

Решение: Приведём выигрышную стратегию для Алисы.

Первым ходом Алиса ломает прут пополам. У неё получаются две палочки одинаковой длины. Каждым своим следующим ходом Алиса будет добиваться того, чтобы все имеющиеся палочки разбивались на пары палочек одинаковой длины. Для этого она будет брать палочку той же длины, что только что сломал Боб и делить её на две палочки точно так же, как он.

После последнего хода Алисы остаётся 44 пары палочке. Боб своим последним ходом ломает одну из палочек, но 43 пары палочек всё ещё остаётся.

На самом деле, даже двух пар равных палочек достаточно, чтобы получить треугольник. Действительно, рассмотрим пару самых длинных палочек. Мы можем составить треугольник используя эту пару и любую палочку меньшей длины.

Вариант 3. У Алисы и Боба есть прут длиной один метр. С помощью этого прута они играют в игру, первой ходит Алиса. В свой ход игрок может сломать одну из имеющихся палочек на две части меньшего размера. Игра заканчивается, когда остаётся ровно 77 палочек.

Алиса хочет, чтобы из каких-то трёх палочек в конце игры можно было составить треугольник, Боб хочет ей помешать. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Алиса.

Решение: Приведём выигрышную стратегию для Алисы.

Первым ходом Алиса ломает прут пополам. У неё получаются две палочки одинаковой длины. Каждым своим следующим ходом Алиса будет добиваться того, чтобы все имеющиеся палочки разбивались на пары палочек одинаковой длины. Для этого она будет брать палочку той же длины, что только что сломал Боб и делить её на две палочки точно так же, как он.

После последнего хода Алисы остаётся 38 пар палочке. Боб своим последним ходом ломает одну из палочек, но 37 пар палочек всё ещё остаётся.

На самом деле, даже двух пар равных палочек достаточно, чтобы получить треугольник. Действительно, рассмотрим пару самых длинных палочек. Мы можем составить треугольник используя эту пару и любую палочку меньшей длины.

Задача 5. (3 балла)

Вариант 1. Клетчатая доска 9×9 раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На ней стоят *чётные ладьи* — фигуры, которые бьют по горизонтали и вертикали, но только поля того цвета, на котором находятся. Чётная ладья может бить поля своего цвета сквозь другую чётную ладью, находящуюся на поле другого цвета.

Какое наибольшее количество чётных ладей можно расставить на такой доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 17

Решение: Пронумеруем клетки доски как показано на рисунке:

1	2	1	2	...	1
3	4	3	4	...	3
1	2	1	2	...	1
3	4	3	4	...	3
...	...	...	...	...	...
3	4	3	4	...	3
1	2	1	2	...	1

Таким образом, белые клетки пронумерованы цифрами 1 и 4, а чёрные — цифрами 2 и 3. Можно заметить, что бьют друг друга только чётные ладьи, стоящие на клетках, пронумерованных одной цифрой. Клетки, пронумерованные 1, стоят на пересечении пяти строк и пяти столбцов. На них можно поставить максимум 5 ладей. Клетки, пронумерованные 2, стоят на пересечении пяти строк и четырёх столбцов. На них можно поставить максимум 4 ладей. Клетки, пронумерованные 3, стоят на пересечении четырёх строк и пяти столбцов. На них можно поставить максимум 4 ладей. Клетки, пронумерованные 4, стоят на пересечении четырёх строк и четырёх столбцов. На них можно поставить максимум 4 ладей. Итого максимум 17 ладей.

Пример очевидно следует из оценки. Достаточно расставить ладей на главной диагонали и на диагонали сразу под ней.

Вариант 2. Клетчатая доска 11×11 раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На ней стоят *чётные ладьи* — фигуры, которые бьют по горизонтали и вертикали, но только поля того цвета, на котором находятся. Чётная ладья может бить поля своего цвета сквозь другую чётную ладью, находящуюся на поле другого цвета.

Какое наибольшее количество чётных ладей можно расставить на такой доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 21

Решение: Пронумеруем клетки доски как показано на рисунке в вар. 1.

Таким образом, белые клетки пронумерованы цифрами 1 и 4, а чёрные — цифрами 2 и 3. Можно заметить, что бьют друг друга только чётные ладьи, стоящие на клетках, пронумерованных одной цифрой. Клетки, пронумерованные 1, стоят на пересечении шести строк и шести столбцов. На них можно поставить максимум 6 ладей. Клетки, пронумерованные 2, стоят на пересечении шести строк и пяти столбцов. На них можно поставить максимум 5 ладей. Клетки, пронумерованные 3, стоят на пересечении пяти строк и шести столбцов. На них можно поставить максимум 5 ладей. Клетки, пронумерованные 4, стоят на пересечении пяти строк и пяти столбцов. На них можно поставить максимум 5 ладей. Итого максимум 21 ладья.

Пример очевидно следует из оценки. Достаточно расставить ладей на главной диагонали и на диагонали сразу под ней.

Вариант 3. Клетчатая доска 13×13 раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На ней стоят *чётные ладьи* — фигуры, которые бьют по горизонтали и вертикали, но только поля того цвета, на котором находятся. Чётная ладья может бить поля своего цвета сквозь другую чётную ладью, находящуюся на поле другого цвета.

Какое наибольшее количество чётных ладей можно расставить на такой доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 25

Решение: Пронумеруем клетки доски как показано на рисунке в вар. 1.

Таким образом, белые клетки пронумерованы цифрами 1 и 4, а чёрные — цифрами 2 и 3. Можно заметить, что бьют друг друга только чётные ладьи, стоящие на клетках, пронумерованных одной цифрой. Клетки, пронумерованные 1, стоят на пересечении семи строк и семи столбцов. На них можно поставить максимум 7 ладей. Клетки, пронумерованные 2, стоят на пересечении семи строк и шести столбцов. На них можно поставить максимум 6 ладей. Клетки, пронумерованные 3, стоят на пересечении шести строк и семи столбцов. На них можно поставить максимум 6 ладей. Клетки, пронумерованные 4, стоят на пересечении шести строк и шести столбцов. На них можно поставить максимум 6 ладей. Итого максимум 25 ладей.

Пример очевидно следует из оценки. Достаточно расставить ладей на главной диагонали и на диагонали сразу под ней.

Задача 6. (4 балла)

Вариант 1. Найдите наибольшее натуральное число, для которого сумма остатка и неполного частного при делении на 19 не больше, чем сумма остатка и неполного частного при делении на 20.

Ответ: $6859 = 19^3$

Решение: Обозначим искомое число за N и запишем формулы для деления с остатком: $N = 19a + b = 20c + d$, где $b < 19$, $d < 20$. Кроме того, по условию должно выполняться неравенство $a + b \leq c + d$.

Случай $a = c = 0$ нам не интересен, так как N получается не больше 18. Заметим, что если $a = c > 0$, то из равенства для N мы получаем, что $b > d$, а из неравенства получаем, что $b \leq d$. Значит, $a > c$, откуда $b < d$.

Обозначим $a = c + x$. Тогда получаем $19(c + x) + b = 20c + d$, откуда $d - b = 19x - c$. С другой стороны, из неравенства в условии получаем, что $d - b \geq a - c = x$. Из того, что $d \leq 19$ и $b \geq 0$, получаем, что $x \leq d - b \leq 19$. Соответственно $c = 19x - (d - b) \leq 18(d - b) \leq 18 \cdot 19 = 342$.

Значит, $N = 20c + d \leq 20 \cdot 342 + 19 = 6859$.

Вариант 2. Найдите наибольшее натуральное число, для которого сумма остатка и неполного частного при делении на 29 не больше, чем сумма остатка и неполного частного при делении на 30.

Ответ: $24389 = 29^3$

Решение: Обозначим искомое число за N и запишем формулы для деления с остатком: $N = 29a + b = 30c + d$, где $b < 29$, $d < 30$. Кроме того, по условию должно выполняться неравенство $a + b \leq c + d$.

Случай $a = c = 0$ нам не интересен, так как N получается не больше 28. Заметим, что если $a = c > 0$, то из равенства для N мы получаем, что $b > d$, а из неравенства получаем, что $b \leq d$. Значит, $a > c$, откуда $b < d$.

Обозначим $a = c + x$. Тогда получаем $29(c + x) + b = 30c + d$, откуда $d - b = 29x - c$. С другой стороны, из неравенства в условии получаем, что $d - b \geq a - c = x$. Из того, что $d \leq 29$ и $b \geq 0$, получаем, что $x \leq d - b \leq 29$. Соответственно $c = 29x - (d - b) \leq 28(d - b) \leq 28 \cdot 29 = 912$.

Значит, $N = 30c + d \leq 30 \cdot 912 + 29 = 24389$.

Вариант 3. Найдите наибольшее натуральное число, для которого сумма остатка и неполного частного при делении на 24 не больше, чем сумма остатка и неполного частного при делении на 25.

Ответ: $13824 = 24^3$

Решение: Обозначим искомое число за N и запишем формулы для деления с остатком: $N = 24a + b = 25c + d$, где $b < 24$, $d < 25$. Кроме того, по условию должно выполняться неравенство $a + b \leq c + d$.

Случай $a = c = 0$ нам не интересен, так как N получается не больше 23. Заметим, что если $a = c > 0$, то из равенства для N мы получаем, что $b > d$, а из неравенства получаем, что $b \leq d$. Значит, $a > c$, откуда $b < d$.

Обозначим $a = c + x$. Тогда получаем $24(c + x) + b = 25c + d$, откуда $d - b = 24x - c$. С другой стороны, из неравенства в условии получаем, что $d - b \geq a - c = x$. Из того, что $d \leq 24$ и $b \geq 0$, получаем, что $x \leq d - b \leq 24$. Соответственно $c = 24x - (d - b) \leq 23(d - b) \leq 23 \cdot 24 = 552$.

Значит, $N = 25c + d \leq 25 \cdot 552 + 24 = 13824$.

Задача 7. (4 балла)

Вариант 1. На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (есть и те, и другие). У каждого из них ровно четыре друга. Однажды каждый сказал: «Среди моих друзей ровно два рыцаря». Какое наименьшее и наибольшее количество рыцарей может быть на острове, если там живут всего 32 человека?

Ответ: Наименьшее число 3, наибольшее — 21.

Решение:

Наименьшее число. Оценка: Поскольку и те, и другие присутствуют, есть хотя бы один рыцарь. У него есть ровно двое друзей, поэтому рыцарей минимум трое.

Наименьшее число. Пример: Рассмотрим трёх рыцарей и 29 лжецов. Пусть три рыцаря дружат между собой, у каждого из них есть ещё 2 друга, пусть это будут шестеро различных лжецов. Разобьём их на две тройки и сделаем так, чтобы дружили между собой лжецы из разных троек.

Остальных лжецов посадим за круглый стол и скажем, что каждый лжец должен дружить с двумя следующими и двумя предыдущими по часовой стрелке.

Наибольшее число. Оценка: Пусть рыцарей хотя бы 22. У каждого из них ровно двое знакомых лжецов, итого мы получаем хотя бы 44 знакомства между рыцарями и лжецами. У каждого лжеца не более 4 таких знакомств, значит, лжецов не менее 11 и всего человек не менее 33.

Наибольшее число. Пример: Посадим 21 рыцаря за круглый стол и скажем, пусть каждый дружит с двумя своими соседями. Также занумеруем рыцарей числами от 1 до 21.

Пусть первый лжец дружит с рыцарями 1, 2, 3 и 4, второй — с рыцарями 3, 4, 5, и 6, и т.д., девятый лжец дружит с рыцарями 17, 18, 19, 20. Десятый лжец будет дружить с рыцарями 1, 2 и 21, одиннадцатый — с рыцарями 19, 20 и 21, кроме того эти двое лжецов будут дружить друг с другом.

Вариант 2. На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (есть и те, и другие). У каждого из них ровно четыре друга. Однажды каждый сказал: «Среди моих друзей ровно два рыцаря».

Какое наименьшее и наибольшее количество рыцарей может быть на острове, если там живут всего 44 человека?

Ответ: Наименьшее число 3, наибольшее — 29.

Решение:

Наименьшее число. Оценка: Поскольку и те, и другие присутствуют, есть хотя бы один рыцарь. У него есть ровно двое друзей, поэтому рыцарей минимум трое.

Наименьшее число. Пример: Рассмотрим трёх рыцарей и 41 лжеца. Пусть три рыцаря дружат между собой, у каждого из них есть ещё 2 друга, пусть это будут шестеро различных лжецов. Разобьём их на две тройки и сделаем так, чтобы дружили между собой лжецы из разных троек.

Остальных лжецов посадим за круглый стол и скажем, что каждый лжец должен дружить с двумя следующими и двумя предыдущими по часовой стрелке.

Наибольшее число. Оценка: Пусть рыцарей хотя бы 30. У каждого из них ровно двое знакомых лжецов, итого мы получаем хотя бы 60 знакомств между рыцарями и лжецами. У каждого лжеца не более 4 таких знакомств, значит, лжецов не менее 15 и всего человек не менее 45.

Наибольшее число. Пример: Посадим 29 рыцарей за круглый стол и скажем, пусть каждый дружит с двумя своими соседями. Также занумеруем рыцарей числами от 1 до 29.

Пусть первый лжец дружит с рыцарями 1, 2, 3 и 4, второй — с рыцарями 3, 4, 5, и 6, и т.д., тринадцатый лжец дружит с рыцарями 25, 26, 27, 28. Десятый лжец будет дружит с рыцарями 1, 2 и 29, одиннадцатый — с рыцарями 27, 28 и 29, кроме того эти двое лжецов будут дружить друг с другом.

Вариант 3. На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (есть и те, и другие). У каждого из них ровно четыре друга. Однажды каждый сказал: «Среди моих друзей ровно два рыцаря».

Какое наименьшее и наибольшее количество рыцарей может быть на острове, если там живут всего 26 человек?

Ответ: Наименьшее число 3, наибольшее — 17.

Решение:

Наименьшее число. Оценка: Поскольку и те, и другие присутствуют, есть хотя бы один рыцарь. У него есть ровно двое друзей, поэтому рыцарей минимум трое.

Наименьшее число. Пример: Рассмотрим трёх рыцарей и 23 лжецов. Пусть три рыцаря дружат между собой, у каждого из них есть ещё 2 друга, пусть это будут шестеро различных лжецов. Разобьём их на две тройки и сделаем так, чтобы дружили между собой лжецы из разных троек.

Остальных лжецов посадим за круглый стол и скажем, что каждый лжец должен дружить с двумя следующими и двумя предыдущими по часовой стрелке.

Наибольшее число. Оценка: Пусть рыцарей хотя бы 18. У каждого из них ровно двое знакомых лжецов, итого мы получаем хотя бы 36 знакомств между рыцарями и лжецами. У каждого лжеца не более 4 таких знакомств, значит, лжецов не менее 9 и всего человек не менее 27.

Наибольшее число. Пример: Посадим 17 рыцарей за круглый стол и скажем, пусть каждый дружит с двумя своими соседями. Также занумеруем рыцарей числами от 1 до 17.

Пусть первый лжец дружит с рыцарями 1, 2, 3 и 4, второй — с рыцарями 3, 4, 5, и 6, и т.д., седьмой лжец дружит с рыцарями 13, 14, 15, 16. Десятый лжец будет дружит с рыцарями 1, 2 и 17, одиннадцатый — с рыцарями 15, 16 и 17, кроме того эти двое лжецов будут дружить друг с другом.

Задача 8. (5 баллов)

Вариант 1. Натуральные числа a , b и c таковы, что $ab + bc + ac = p$ — простое и $b^2 + c^2$ делится на p . Найдите все возможные значения a , b , c и p .

Ответ: $p = 5$, $a = b = 1$, $c = 2$ или $p = 5$, $a = c = 1$, $b = 2$.

Решение: Заметим, что

$$b^2 + p = b^2 + ab + bc + ac = (a + b)(b + c), \quad c^2 + p = c^2 + ab + bc + ac = (a + c)(b + c),$$

откуда, складывая, имеем

$$b^2 + c^2 + 2p = (a + c)(b + c) + (a + b)(b + c) = (b + c)(2a + b + c).$$

Левая часть делится на p , значит, и правая тоже. Так как p — простое, на него делится один из множителей. Это не может быть $b + c$, так как $b + c < ab + bc + ac$. Значит, $2a + b + c$ делится на $ab + bc + ac$.

Если $b \geq 2$, получаем $2a \leq ab$, $b \leq bc$ и $c \leq ac$, поэтому сумма $2a + b + c$ не больше суммы $ab + bc + ac$ и может на неё делиться только если эти суммы равны, то есть равны соответствующие слагаемые. Значит, $b = 2$, $c = 1$, $a = 1$, $p = ab + bc + ac = 5$.

Аналогично разбираемся с $c \geq 2$ и находим решение $c = 2$, $b = 1$, $a = 1$, $p = ab + bc + ac = 5$.

Если же $b = c = 1$, получаем $b^2 + c^2 = 2$, при этом $p = 2a + 1 \geq 3$, значит этот случай невозможен.

Вариант 2. Натуральные числа a , b и c таковы, что $ab + bc + ac = p$ — простое и $a^2 + c^2$ делится на p . Найдите все возможные значения a , b , c и p .

Ответ: $p = 5$, $a = b = 1$, $c = 2$ или $p = 5$, $a = 2$, $b = c = 1$.

Решение: Заметим, что

$$a^2 + p = a^2 + ab + bc + ac = (a + b)(a + c), \quad c^2 + p = c^2 + ab + bc + ac = (a + c)(b + c),$$

откуда, складывая, имеем

$$a^2 + c^2 + 2p = (a + c)(a + b) + (a + c)(b + c) = (a + c)(a + 2b + c).$$

Левая часть делится на p , значит, и правая тоже. Так как p — простое, на него делится один из множителей. Это не может быть $a + c$, так как $a + c < ab + bc + ac$. Значит, $a + 2b + c$ делится на $ab + bc + ac$.

Если $a \geq 2$, получаем $a \leq ac$, $2b \leq ab$ и $c \leq bc$, поэтому сумма $2a + b + c$ не больше суммы $ab + bc + ac$ и может на неё делиться только если эти суммы равны, то есть равны соответствующие слагаемые. Значит, $c = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $p = ab + bc + ac = 5$.

Аналогично разбираемся с $c \geq 2$ и находим решение $c = 2$, $b = 1$, $a = 1$, $p = ab + bc + ac = 5$.

Если же $a = c = 1$, получаем $a^2 + c^2 = 2$, при этом $p = 2b + 1 \geq 3$, значит этот случай невозможен.

Вариант 3. Натуральные числа a , b и c таковы, что $ab + bc + ac = p$ — простое и $a^2 + b^2$ делится на p . Найдите все возможные значения a , b , c и p .

Ответ: $p = 5$, $b = c = 1$, $a = 2$ или $p = 5$, $a = c = 1$, $b = 2$

Решение: Заметим, что

$$a^2 + p = a^2 + ab + bc + ac = (a + b)(a + c), \quad b^2 + p = b^2 + ab + bc + ac = (a + b)(b + c),$$

откуда, складывая, имеем

$$a^2 + b^2 + 2p = (a + b)(a + c) + (a + b)(b + c) = (a + b)(a + b + 2c).$$

Левая часть делится на p , значит, и правая тоже. Так как p — простое, на него делится один из множителей. Это не может быть $a + b$, так как $a + b < ab + bc + ac$. Значит, $a + b + 2c$ делится на $ab + bc + ac$.

Если $b \geq 2$, получаем $b \leq ab$, $2c \leq bc$ и $a \leq ac$, поэтому сумма $2c + b + c$ не больше суммы $ab + bc + ac$ и может на неё делиться только если эти суммы равны, то есть равны соответствующие слагаемые. Значит, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $p = ab + bc + ac = 5$.

Аналогично разбираемся с $a \geq 2$ и находим решение $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $p = ab + bc + ac = 5$.

Если же $b = c = 1$, получаем $a^2 + b^2 = 2$, при этом $p = 2c + 1 \geq 3$, значит этот случай невозможен.