

9 класс

Задачи и решения

Данный файл содержит печатные версии задач. Онлайн-версии могут незначительно отличаться в формулировках. В частности, отсюда убраны все рекомендации по вводу ответов в систему.

Некоторые задачи даны в общем виде, данные по вариантам представлены в соответствующих таблицах.

Задача 1. (2 балла)**Вариант 1.**

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(4) = 63$, $f(-3) = 14$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 7

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$. Тогда $16a + 4b + c = 63$, $9a - 3b + c = 14$. Вычитая эти равенства, получаем $7(a + b) = 49$, откуда $a + b = 7$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Вариант 2.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(5) = 72$, $f(-4) = 27$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 5

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$. Тогда $25a + 5b + c = 72$, $16a - 4b + c = 27$. Вычитая эти равенства, получаем $9(a + b) = 45$, откуда $a + b = 5$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Вариант 3.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(6) = 77$, $f(-5) = 33$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 4

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$. Тогда $36a + 6b + c = 77$, $25a - 5b + c = 33$. Вычитая эти равенства, получаем $11(a + b) = 44$, откуда $a + b = 4$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Вариант 4.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(7) = 91$, $f(-6) = 52$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 3

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$. Тогда $49a + 7b + c = 91$, $36a - 6b + c = 52$. Вычитая эти равенства, получаем $13(a + b) = 39$, откуда $a + b = 3$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Вариант 5.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(8) = 90$, $f(-7) = 60$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 2

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$. Тогда $64a + 8b + c = 90$, $49a - 7b + c = 60$. Вычитая эти равенства, получаем $15(a + b) = 30$, откуда $a + b = 2$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Вариант 6.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(9) = 102$, $f(-8) = 85$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 1

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$. Тогда $81a + 9b + c = 102$, $64a - 8b + c = 85$. Вычитая эти равенства, получаем $17(a + b) = 17$, откуда $a + b = 1$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6
x_1	4	5	6	7	8	9
y_1	63	72	77	91	90	102
x_2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
y_2	14	27	33	52	60	85
Ответ	7	5	4	3	2	1

Задача 2. (3 балла) (общий вид).

$ABCD$ — вписанный четырёхугольник, $AD = CD = a$, $BD = b$, $\angle C = 90^\circ$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника BCD .

Ответ: $\frac{2a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b + \sqrt{b^2 - a^2}}$.

Решение:

Вообще-то мы хотели спросить про радиус вписанной окружности треугольника ABC , это чуть более интересная задача, но давайте решать то, что получилось.

Нам надо найти радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника. Это можно сделать по формуле, $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь, а p — полупериметр.

По теореме Пифагора $BC = \sqrt{b^2 - a^2}$. Значит, $p = \frac{a + b + \sqrt{b^2 - a^2}}{2}$, $S = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{2}$,

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b + \sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Замечание: вместо этих вычислений можно воспользоваться формулой $r = \frac{BC + CD - BD}{2}$ для прямоугольного треугольника.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6
a	10	12	12	10	6	12
b	20	36	48	25	9	16
Ответ (приближённо)	3,66	4,97	5,24	3,96	1,85	3,29

Задача 3. (3 балла) (общий вид).

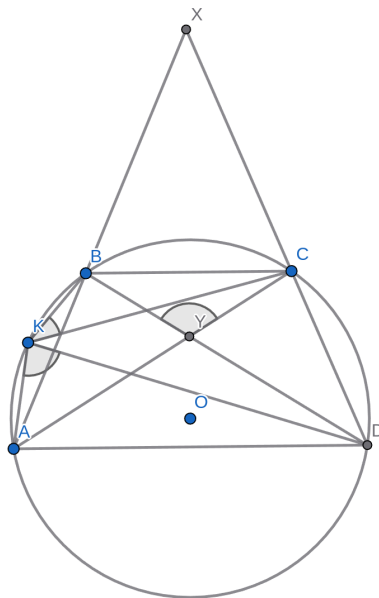
$ABCD$ — равнобедренная трапеция, лучи AB и DC пересекаются в точке X , а диагонали трапеции в точке Y . Точка K , лежащая между прямыми AD и BC такова, что $\angle BKC + \angle DKA = \angle BYC$. O — центр описанной окружности треугольника ABK . $AB = a$, $BX = b$, $OK = r$

Найдите OX^2 .

Ответ: $r^2 + (a + b)b$.

Решение:

Заметим, что равнобедренная трапеция вписана в окружность.



Докажем, что точка K лежит на той же окружности. Если K действительно лежит на этой окружности, $\angle BKC + \angle DKA = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = \angle BYC$. Если K внутри окружности, углы $\angle BKC$ и $\angle DKA$ больше половин соответствующих дуг, а если снаружи — меньше. Значит, K лежит на той же окружности, а центр окружности находится в точке O , а её радиус равен r .

По теореме о степени точки относительно окружности, $AX \cdot BX = OX^2 - r^2$, откуда $OX^2 = r^2 + (a + b)b$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4
a	10	7	16	9
b	8	9	9	16
r	16	9	20	48
Ответ	400	225	625	2704

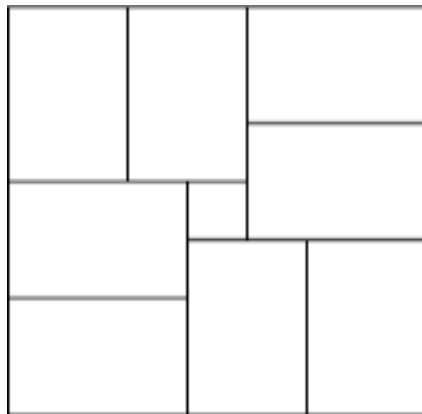
Задача 4. (3 балла)

Вариант 1. В клетках таблицы 7×7 расставлены неотрицательные числа. В каждом прямоугольнике 2×3 или 3×2 сумма чисел не превосходит 60.

Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 540

Решение. Оценка:



Поскольку $2 + 2 + 3 = 7$, мы можем выделить в нашей таблице 8 прямоугольников 2×3 и 3×2 так как показано на рисунке. В центре останется одна клетка, в которой находится число, не большее 60. В каждом из восьми прямоугольников сумма чисел также не больше 60, итого получаем максимум $9 \cdot 60 = 540$.

Пример: Во всех клетках расставляем нули, кроме центральной клетки, четырёх углов и четырёх середин сторон. В этих девяти клетках пишем 60.

Вариант 2. В клетках таблицы 11×11 расставлены неотрицательные числа. В каждом прямоугольнике 5×3 или 3×5 сумма чисел не превосходит 50.

Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 450

Решение. Оценка:

Поскольку $3 + 3 + 5 = 11$, мы можем выделить в нашей таблице 8 прямоугольников 5×3 и 3×5 аналогично показанному на рисунке в вар. 1. В центре останется одна клетка, в которой находится число, не большее 50. В каждом из восьми прямоугольников сумма чисел также не больше 50, итого получаем максимум $9 \cdot 50 = 450$.

Пример: Во всех клетках расставляем нули, кроме центральной клетки, четырёх углов и четырёх середин сторон. В этих девяти клетках пишем 50.

Вариант 3. В клетках таблицы 15×15 расставлены неотрицательные числа. В каждом прямоугольнике 4×7 или 7×4 сумма чисел не превосходит 10.

Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 90

Решение. Оценка:

Поскольку $4 + 4 + 7 = 15$, мы можем выделить в нашей таблице 8 прямоугольников 4×7 и 7×4 аналогично показанному на рисунке в вар. 1. В центре останется одна клетка, в которой находится число, не большее 10. В каждом из восьми прямоугольников сумма чисел также не больше 10, итого получаем максимум $9 \cdot 10 = 90$.

Пример: Во всех клетках расставляем нули, кроме центральной клетки, четырёх углов и четырёх середин сторон. В этих девяти клетках пишем 10.

Задача 5. (3 балла)

Вариант 1. Будем обозначать $\overline{abc}$ число, состоящее из трёх различных цифр a , b и c в указанном порядке. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\overline{abc}, \overline{bca})$?

Ответ: 243

Решение. Пример:

$$\overline{abc} = 972 = 243 \cdot 4, \overline{bca} = 729 = 243 \cdot 3.$$

Оценка: Обозначим искомый НОД за d . Если $\overline{abc}$ и $\overline{bca}$ делятся на d , на него также делится число $10 \cdot \overline{abc} - \overline{bca} = 999a$. Заметим, что $999 = 3^3 \cdot 37$. Если трёхзначное число одновременно делится на 3 и на 37, то оно делится на 111, а значит состоит из одинаковых цифр и не удовлетворяет условию задачи.

Если d число не делится на 37, то оно является делителем числа 3^3a , максимальное значение этого числа как раз равно 243.

Если d делится на 37, то оно, по доказанному выше, не делится на 3. Значит, d является делителем числа $37a$, причём a не делится на 3. Осталось разобрать случаи $d = 7 \cdot 37$ и $d = 8 \cdot 37$, остальные варианты слишком малы.

Рассмотрим все трёхзначные числа, делящиеся на эти два. $7 \cdot 37 = 259$, $2 \cdot 7 \cdot 37 = 518$, $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$, эти числа нам не подходят. $8 \cdot 37 = 296$, $2 \cdot 8 \cdot 37 = 592$, $3 \cdot 8 \cdot 37 = 888$, эти числа нам также не подходят.

Вариант 2. Будем обозначать $\overline{abba}$ число, состоящее из цифр a, b, b и a в указанном порядке, причём $a \neq b$. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\overline{abba}, \overline{baab})$?

Ответ: 132

Решение.Пример:

$$\overline{abba} = 4884 = 132 \cdot 37, \overline{baab} = 8448 = 132 \cdot 64.$$

Оценка: Обозначим искомый НОД за d . Если $\overline{abba}$ и $\overline{baab}$ делятся на d , на него также делится их сумма, равная $1111 \cdot (a + b) = 11 \cdot 101 \cdot (a + b)$. Оба числа очевидно не делятся на 101 при $a \neq b$. Значит, $11 \cdot (a + b)$ делится на d .

Поскольку $a + b$ не больше 17, чтобы получить ответ, больший 132 = 11 · 12, d должно быть в точности равно $11 \cdot (a + b)$.

С другой стороны $\overline{abba} - \overline{baab} = 891(a - b) = 11 \cdot 3^4 \cdot (a - b)$ также делится на d . Поскольку $a - b \leq 8$, чтобы d было больше 11 · 12, необходимо, чтобы d делилось на 3, значит, и $a + b$ делится на 3.

Осталось разобрать случай $a + b = 15$, $d = 11 \cdot 15$. Однако он невозможен, поскольку тогда и a , и b должны делиться на 5.

Вариант 3. Будем обозначать $\overline{abc}$ число, состоящее из трёх различных цифр a, b и c в указанном порядке. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\overline{abc}, \overline{cba})$?

Ответ: 99

Решение.Примеры:

$$\overline{abc} = 198 = 99 \cdot 2, \overline{cba} = 891 = 99 \cdot 9.$$

$$\overline{abc} = 297 = 99 \cdot 3, \overline{cba} = 792 = 99 \cdot 8.$$

$$\overline{abc} = 396 = 99 \cdot 4, \overline{cba} = 693 = 99 \cdot 7.$$

$$\overline{abc} = 495 = 99 \cdot 5, \overline{cba} = 594 = 99 \cdot 6.$$

Оценка: Обозначим искомый НОД за d . Если $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ делятся на d , на него также делится $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$.

Если d не делится на 11, то $9(a - c)$ делится на d , а это число меньше 99. Если d не делится на 3, то $11(a - c)$ делится на d , а это число также меньше 99. Значит, d делится на 33.

Дальше можно перебрать всё трехзначные числа, делящиеся на 33, или заметить следующее:

$\overline{abc} = \overline{xy} \cdot 11$. Если $x + y < 10$, мы получаем, что $a = x, b = x + y, c = y$. Аналогично $\overline{cba} = \overline{yx} \cdot 11$, то есть нам надо найти наибольший возможный общий делитель $\overline{xy}$ и $\overline{yx}$. На него должна делиться также из сумма $11 \cdot (x + y)$. Но при различных x и y число $\overline{xy}$ не делится на 11, значит d не превосходит $11 \cdot (x + y) \leq 99$.

Если же $x + y \geq 10$, всё же придется перебрать. При этом $\overline{xy}$, как и d , должно делиться на 3.

$39 \cdot 11 = 429, 48 \cdot 11 = 528, 57 \cdot 11 = 627, 66 \cdot 11 = 726, 75 \cdot 11 = 825, 84 \cdot 11 = 924, 93 \cdot 11 > 1000, 69 \cdot 11 = 759, 78 \cdot 11 = 858, 87 \cdot 11 = 957, 96 \cdot 11 > 1000, 99 \cdot 11 > 1000$.

Можно убедиться, что у любой подходящей под условие пары НОД равен 33.

Задача 6. (4 балла) (общий вид)

Про положительные числа a, b, c известно, что $\frac{1}{abc} - k^2 \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \right) = 2k^3$.

Докажите, что среди чисел a, b, c есть число, не меньшее $\frac{1}{2k}$.

Доказательство: Сделаем замену $x = ka, y = kb, z = kc$ получим $\frac{k^3}{xyz} - k^2 \left(\frac{kx}{yz} + \frac{ky}{xz} + \frac{kz}{xy} \right) = 2k^3$.

Домножив на xyz и разделив на k^3 получим $1 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2xyz$ или $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Нам необходимо и достаточно доказать, что среди чисел x, y и z одно не меньше $\frac{1}{2}$. Это очевидно, поскольку если все числа меньше $\frac{1}{2}$, левая часть последнего равенства меньше 1.

Комментарий: эта задача взялась из следующих свойств углов треугольника: если α, β и γ углы треугольника, то для них выполняется равенство

$$\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 + \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 + \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) = 1.$$

Задача 7. (4 балла)(общий вид)

В Нонквинтляндии n городов, некоторые из которых соединены дорогами. Путешественник обнаружил, что невозможно проехать по пяти разным дорогами и вернуться в исходный город. Докажите, что в стране не более m дорог.

Каждая дорога соединяет два города. Два города могут быть соединены не более, чем одной дорогой. По каждой дороге можно двигаться в любом из двух направлений. Путешественник может двигаться только по дорогам.

Доказательство:

Заметим сначала, что во всех вариантах $m = 0.7 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, то есть m составляет $\frac{7}{10}$ от максимального числа дорог, которые могут быть проведены между n городами.

Будем называть замкнутый маршрут из пяти дорог, существование которого запрещено условием, 5-циклом.

Докажем, что если среди любых пяти городов проведено не меньше восьми (из десяти возможных) дорог, то среди этих городов можно найти 5-цикл. Действительно, если дорог не меньше восьми, то отсутствуют не больше двух дорог. Можно пронумеровать города так, чтобы отсутствовали дороги, соединяющие города 1 и 2, 1 и 3 либо города 1 и 2, 3 и 4.

В первом случае мы найдём 5-цикл 1-4-2-3-5-1, во втором 1-3-5-2-4-1.

Поскольку каждая пара городов с проведённой между ними дорогой или антидорогой входит в равное число таких пятёрок, поэтому общее количество дорог также составляет не более $\frac{7}{10}$ от максимально возможного, то есть максимум

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{7n(n-1)}{20}.$$

Докажем это чуть более строго. В каждой пятёрке городов не более 7 дорог. Всего этих пятёрок C_n^5 . Итого получаем максимум $7C_n^5$ дорог, однако, каждая из них посчитана несколько раз. А именно, к каждой паре городов можно подобрать ещё 3 города C_{n-2}^3 способами, значит, именно столько раз мы посчитали каждую дорогу.

Таким образом, всего дорог не более $\frac{7C_n^5}{C_{n-2}^3} = \frac{7 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}}{\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}} = \frac{7n(n-1)}{20}.$

Таблица с параметрами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4
n	200	300	400	500
m	13930	31395	55860	87325

Задача 8. (5 баллов)(общий вид)

Обозначим за $d(n)$ число натуральных делителей числа n (включая единицу и само число).

Найдите все такие n , что $n = p \cdot d(n)$.

Ответ: $8p, 12p$.

Решение:

Очевидно, n делится на p . Разложим n в произведение степеней простых чисел: $n = p^k p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$. Тогда $d(n) = (k+1)(k_1+1) \dots (k_m+1)$. Разделив n на $p \cdot d(n)$ получим

$$\frac{3^{l-1}}{l+1} \cdot \frac{p^{k-1}}{k+1} \cdot \frac{p_1^{k_1}}{k_1+1} \dots \frac{p_m^{k_m}}{k_m+1} = 1.$$

Заметим, что все дроби в этом произведении, кроме первого гарантированно не меньше 1 (равенство достигается только в случае $\frac{2^k}{1+1} = 1$). Тогда первая дробь гарантированно не превосходит единицы.

Первая дробь не превосходит единицы только при $k = 1$, поскольку во всех вариантах $p \geq 7$. В этом случае она равна $\frac{1}{2}$.

Множитель 2 в числителе может получиться только одно из оставшихся простых чисел равно 2. Рассмотрим дроби вида $\frac{2^{k_1}}{k_1+1}$, которые не превосходят 2: это $\frac{2^1}{1+1} = 1, \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}, \frac{2^3}{3+1} = 2$.
 $\frac{2^1}{1+1} = 1$ не устраивает нас, поскольку двойка в числителе не образуется.

Наличие в произведение дроби $\frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$ означает, что должна быть ещё дробь с множителем 3 в числителе. Однако $\frac{3^2}{2+1} = 3$ и больше дроби дадут в итоге слишком большое произведение, а вот вариант $\frac{3^1}{1+1} = \frac{3}{2}$ нас устраивает. Итак, мы получили первый отве $n = 12p$.
 $\frac{2^3}{3+1} = 2$ даёт нам второй ответ $8p$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5
p	11	13	17	19	23
$8p$	88	104	136	152	184
$12p$	132	156	204	228	276