

10 класс

Задачи

Данный файл содержит печатные версии задач. Онлайн-версии могут незначительно отличаться в формулировках. В частности, отсюда убраны все рекомендации по вводу ответов в систему.

Некоторые задачи даны в общем виде, данные по вариантам представлены в соответствующих таблицах.

Задача 1. (2 балла)**Вариант 1**

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{500} .

Вариант 2

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{1000} .

Вариант 3

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{800} .

Вариант 4

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{150} .

Вариант 5

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 7$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{400} .

Вариант 6

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{200} .

3

Вариант 7

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{700} .

Вариант 8

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{350} .

Вариант 9

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$, $a_5 = 16$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{550} .

Вариант 10

Медиана пятёрки чисел, это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ равна числу c .

Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 10$, $a_2 = 6$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{200} .

Задача 2. (2 балла)(общий вид)

Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 + \frac{n^2}{c}$, причём все дроби несократимы.

Найдите $|a - b|$.

Число n в задаче является параметром, см. таблицу.

Задача 3. (3 балла)(общий вид)

В треугольнике ABC проведена высота AH . На стороне AB отмечена точка K . Оказалось, что $AK = a$, $KB = b$, $BH = c$, $CH = d$.

Отрезки AH и CK пересекаются в точке M . Найдите синус угла $\angle MBH$.

Задача 4. (3 балла)(общий вид)

Положительные числа a_i и b_i таковы, что $\sum_{i=1}^n a_i = x$, $\sum_{i=1}^n b_i = y$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\sum_{i=1}^n \frac{(a_i + b_i)^3}{a_i b_i}$.

Задача 5. (3 балла)

Дана трапеция $ABCD$, боковые стороны которой имеют длины $AB = a$, $CD = b$. Также известна длина диагонали $BD = d$.

Точка K на продолжении стороны AB за точку A такова, что $\angle BKD = \angle ADC$. Также оказалось, что AD — биссектриса $\angle BDK$.

Точка L на луче DA такова, что $\angle LKA = \angle CBD$.

Найдите длину DL .

Задача 6. (3 балла)

На одной из клеток верхней строки клетчатого прямоугольника, стоит шахматный слон. Он начинает движение, за один ход перемещаясь на одну клетку по диагонали в одном и том же направлении. Достигнув клетки на стороне прямоугольника, слон меняет направление на 90° .

Через n ходов слон впервые вернулся на исходную клетку, ни разу не попав в угол многоугольника. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Задача 7. (4 балла)(общий вид)

На конференции по теории графов собралось много учёных. Они выяснили следующие вещи:

- (1) У каждого из них ровно a знакомых на конференции.
- (2) У любых двух знакомых ровно b общих знакомых на конференции.
- (3) У любых двух незнакомых ровно c общих знакомых на конференции.

Сколькими способами можно посадить за круглый стол четверых учёных так, чтобы справа и слева от каждого сидели его знакомые?

(Порядок рассадки для данной четверки учёных важен и должен учитываться в ответе).

Задача 8. (5 баллов)(общий вид)

Обозначим за $d(n)$ число натуральных делителей числа n (включая единицу и само число).

Найдите все такие n , что $n = 3p \cdot d(n)$ (где p — простое число, свой для каждого варианта).