

## 11 класс

## Задачи

Данный файл содержит печатные версии задач. Онлайн-версии могут незначительно отличаться в формулировках. В частности, отсюда убраны все рекомендации по вводу ответов в систему.

Все задачи даны в общем виде, данные по вариантам представлены в соответствующих таблицах.

**Задача 1. (2 балла)** (общий вид)

Многочлен  $P(x) - a$  и многочлен  $P(P(x) - b)$  имеют как минимум один общий корень.

Докажите, что число  $a - b$  является корнем многочлена  $P(x)$ .

**Задача 2. (3 балла)** (Общий вид)**Варианты 1–5.**

Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. В начале игры на доске написан многочлен  $x^{2n+1} + x^{2n} + \dots + x^2 + x + 1$ . В свой ход игрок может либо заменить многочлен на его производную, либо, если в многочлене больше одного одночлена, стереть с доски один из одночленов.

Если при дифференцировании какого-то одночлена получается 0, он на доске не пишется.

Игра заканчивается, когда на доске остаётся число. Петя хочет, чтобы это число было как можно больше, а Вася — чтобы как можно меньше.

Какое число останется на доске при правильной игре?

Таблица с параметрами по вариантам:

| Вариант | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|---------|------|------|------|------|------|
| $n$     | 1010 | 1011 | 1012 | 1013 | 1014 |
| Степень | 2021 | 2023 | 2025 | 2027 | 2029 |
| Ответ   |      |      |      |      | !    |

**Варианты 6–10.**

Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. В начале игры на доске написан многочлен  $x^{2n+1} + x^{2n} + \dots + x^2 + x + 1$ . В свой ход игрок может либо заменить многочлен на его производную, либо, если в многочлене больше одного одночлена, стереть с доски один из одночленов.

Если при дифференцировании какого-то одночлена получается в 0, он на доске не пишется.

Игра заканчивается, когда на доске остаётся число. Вася хочет, чтобы это число было как можно больше, а Петя — чтобы как можно меньше.

Какое число останется на доске при правильной игре?

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

| Вариант | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|---------|------|------|------|------|------|
| $n$     | 1010 | 1011 | 1012 | 1013 | 1014 |
| Степень | 2021 | 2023 | 2025 | 2027 | 2029 |
| Ответ   |      |      |      |      |      |

*Замечание:* В качестве стратегии для Васи в этих вариантах также подходит удаление младших членов.

**Задача 3. (2 балла)** (общий вид)

Сфера  $S$  проходит через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  и середины рёбер  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$ . Высота тетраэдра, опущенная из точки  $D$ , имеет длину  $2h$ , а радиус описанной окружности треугольника  $ABC$  составляет  $2 \cdot \sqrt{k}$ .

Найдите радиус сферы  $S$ .

**Задача 4. ( 3 балла)** (Общий вид)

Антон выбрал несколько  $n$ -элементных множеств натуральных чисел. Оказалось, что любые два множества имеют хотя бы один общий элемент, но никакие четыре не имеют общего элемента.

Докажите, что выбранных множеств не более  $2n$ .

**Задача 5. ( 4 балла)** (общий вид)

Попарно различные натуральные числа  $x_1, \dots, x_n$  таковы, что для каждой двух из них одно является степенью другого с натуральным показателем. Найдите наименьшее возможное значения выражения

$$\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \log_{x_3} x_4 + \dots + \log_{x_{n-1}} x_n + \log_{x_n} x_1$$

**Задача 6. ( 4 балла)** (общий вид)

Найдите все пары чисел  $(p, n)$ , где  $p$  — простое, а  $n$  — целое и при этом  $p^4 + a = n^2 + 5pn$ .

В ответе укажите значения  $n$ . Если их несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

**Задача 7. ( 4 балла)**

В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AH$ . На ней отмечена точка  $F$ . Через точку  $F$  проведены отрезки  $BK$ ,  $CT$  к сторонам треугольника, а  $HK$  пересекает  $CT$  в точке  $R$ . Известно, что  $BT = \frac{a(a+b)}{a-b}$ ,  $TF = a$ ,  $FR = b$ . Найти длину  $AB$ .

**Задача 8. ( 4 балла)**

В Нонквинтляндии  $n$  городов, некоторые из которых соединены дорогами. Путешественник обнаружил, что невозможно проехать по пяти разным дорогами и вернуться в исходный город. Докажите, что в стране не более  $m$  дорог.

Каждая дорога соединяет два города. Два города могут быть соединены не более, чем одной дорогой. По каждой дороге можно двигаться в любом из двух направлений. Путешественник может двигаться только по дорогам.