Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 11 класс. Решения задач

весна 2023 г.

11 класс

Задача 11.1. *(15 баллов)* Каждое натуральное число покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный, причём все 3 цвета встречаются. Может ли оказаться так, что сумма любых двух чисел разных цветов является числом оставшегося цвета?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что такое возможно. Без ограничения общности можно считать, что число 1 покрашено в первый цвет. Выберем произвольное число x второго цвета. Заметим, что тогда $x+1$ должно быть третьего цвета, $x+2$ — второго, $x+3$ — третьего и т. д. Таким образом, все числа, большие x, покрашены во второй или третий цвет. С другой стороны, так как x покрашен во второй цвет, а $x+1$ — в третий, число $2x+1$ должно быть покрашено в первый цвет, противоречие. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

10 б. Доказано, что с некоторого момента чередуются числа двух цветов.

10 б. Разобран случай, когда числа 1 и 2 одного цвета.

2 б. Разобран случай, когда числа 1 и 2 разных цветов, и получено противоречие на маленьких числах.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Рассмотрены несколько частных случаев раскраски натурального ряда.

0 б. Приведён только ответ.

Снимаются баллы за следующие недочёты в в остальном верном решении:

−2 б. Утверждается, но никак не обосновывается, что с некоторого момента чередуются числа двух цветов.

Задача 11.2. *(15 баллов)* Различные действительные числа x, y, z таковы, что среди трёх чисел

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}, \quad \frac{y+z}{y^2+yz+z^2}, \quad \frac{z+x}{z^2+zx+x^2}$$

какие-то два равны. Верно ли, что все эти три числа равны?

Ответ: да.

Решение. В данных выражениях умножим числители и знаменатели на $x-y$, $y-z$, $z-x$ соответственно (согласно условию, эти разности ненулевые). Получим те же числа в другом виде:

$$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}, \quad \frac{y^2-z^2}{y^3-z^3}, \quad \frac{z^2-x^2}{z^3-x^3}.$$

Без ограничения общности будем считать, что первое и третье числа равны. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \frac{z^2-x^2}{z^3-x^3} \quad \Rightarrow \\ x^2z^3 - x^5 - y^2z^3 + y^2x^3 = z^2x^3 - z^2y^3 - x^5 + x^2y^3 \quad \Rightarrow \\ x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 = x^3z^2 + y^3x^2 + z^3y^2. \qquad (*)\end{gathered}$$

Это симметричное равенство, поэтому теперь можно просто поменять местами две переменные (например, x и y) и проделать те же переходы в обратном порядке, получив равенство третьего и второго чисел:

$$\begin{gathered}x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 = x^3z^2 + y^3x^2 + z^3y^2 \quad \Rightarrow \\ x^2z^3 - x^2y^3 - z^5 + z^2y^3 = z^2x^3 - z^5 - y^2x^3 + y^2z^3 \quad \Rightarrow \\ \frac{x^2-z^2}{x^3-z^3} = \frac{z^2-y^2}{z^3-y^3} \quad \Rightarrow \\ \frac{z^2-x^2}{z^3-x^3} = \frac{y^2-z^2}{y^3-z^3}.\end{gathered}$$

(Деления при этом корректны, так как выражения-делители уже фигурировали ранее в знаменателях, и мы знаем, что они не равны нулю.) □

Замечание. Равенство (*) эквивалентно $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx) = 0$. Отсюда легко понять, в частности, что такие x, y, z существуют — подойдёт любая тройка различных чисел, для которых $xy + yz + zx = 0$, например $x = -2$, $y = 3$, $z = 6$.

Другое решение. Без ограничения общности предположим, что первые два выражения равны k. Имеем

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2} = k, \\ \dfrac{y+z}{y^2+yz+z^2} = k.\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x+y = k(x^2+xy+y^2), \\ y+z = k(y^2+yz+z^2).\end{cases}$$

Вычитая эти равенства, получаем

$$\begin{gathered}x - z = k(x^2 - z^2 + xy - yz) \quad \Rightarrow \\ x - z = k(x-z)(x+z+y) \quad \Rightarrow \\ 1 = k(x+y+z).\end{gathered}$$

(Последний переход корректен, так как по условию $x - z \neq 0$.)

Мы получили симметричный относительно x, y, z вывод. Теперь можно проделать переходы в обратном порядке, чтобы установить, что и третье из данных выражений тоже равно k:

$$\begin{gathered} 1 = k(x+y+z) \quad \Rightarrow \\ z-y = k(z-y)(x+z+y) \quad \Rightarrow \\ z-y = k(z^2-y^2+zx-xy). \end{gathered}$$

Складывая с уже известным $x+y = k(x^2+xy+y^2)$, получаем

$$z+x = k(z^2+zx+x^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{z+x}{z^2+zx+x^2} = k.$$

(Последний переход корректен, так как выражение, на которое мы делим, уже фигурирует в знаменателе в условии задачи.) □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

10 б. В (в остальном верном) решении производится деление на выражение, значение которого может быть равно 0, но случай равенства 0 не разбирается; при этом разбор этого случая не представляет сложности (например, при приравнивании первых двух дробей происходит деление на $x+y$ и не проверяется случай, когда $x+y=0$).

6 б. Доказано равенство $xy+yz+zx=0$.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. В решении производится деление на выражение, значение которого может быть равно 0, но случай равенства 0 не разбирается, и разбор этого случая нетривиален.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 11.3. *(15 баллов)* Натуральные числа a, b, c таковы, что $1 \leqslant a < b < c \leqslant 3000$. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$\text{НОД}(a,b) + \text{НОД}(b,c) + \text{НОД}(c,a).$$

Ответ: 3000.

Решение. Заметим, что $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a,b-a) \leqslant b-a$, так как НОД двух натуральных чисел не превосходит каждое из них. Аналогично получаем, что $\text{НОД}(b,c) \leqslant c-b$, а также $\text{НОД}(c,a) \leqslant a$.

Складывая эти три неравенства, получаем

$$\text{НОД}(a,b) + \text{НОД}(b,c) + \text{НОД}(c,a) \leqslant (b-a)+(c-b)+a = c \leqslant 3000.$$

В качестве примера на 3000 можно предъявить, например, $a = 1000$, $b = 2000$, $c = 3000$. В этом случае НОД(a, b) + НОД(b, c) + НОД$(c, a) = 1000 + 1000 + 1000 = 3000$. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются.

+14 б. *Оценка* — доказано, что рассматриваемая сумма не превосходит 3000.

В отсутствие такого доказательства оценивается следующее продвижение:

+4 б. Замечено, что НОД различных натуральных чисел не превосходит их разности, но дальнейших продвижений нет.

+1 б. *Пример* — приведены числа a, b, c, для которых рассматриваемая сумма равна 3000 (либо иным способом доказано, что такие числа существуют).

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

0 б. Неполный перебор, в котором отсутствует разбор одного из случаев, и этот случай не аналогичен разобранным.

Задача 11.4. *(15 баллов)* В окружность ω вписан треугольник ABC такой, что $AB < BC$. Биссектриса внешнего угла B пересекает ω в точке M. Прямая, параллельная BM, пересекает стороны BC, AB и продолжение стороны CA за точку A в точках P, Q и R соответственно. Прямая MR вторично пересекает ω в точке X. Докажите, что точки B, P, Q, X лежат на одной окружности.

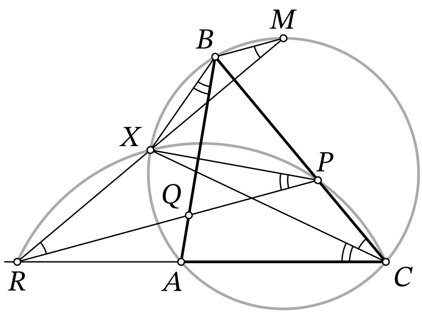


Рис. 1: к решению задачи 11.4.

Решение. Рис. 1. Докажем, что точки R, X, P, C лежат на одной окружности Ω. Действительно, $\angle XRP = \angle BMX$ как накрест лежащие при параллельных прямых BM и RP, а $\angle BMX = \angle BCX$ как опирающиеся на одну дугу в ω, откуда $\angle XRP = \angle XCP$.

Теперь получаем $\angle XBQ = \angle XCA$ из окружности ω и $\angle XCA = \angle XPR$ из окружности Ω. Значит, $\angle XBQ = \angle XPQ$, откуда и следует, что точки X, B, P, Q лежат на одной окружности. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

7 б. Доказано, что один из четырёхугольников $RXPC$ или $RXQA$ вписанный.

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Счёт углов, из которого не сделан вывод о вписанности одного из четырёхугольников $RXPC$ или $RXQA$.

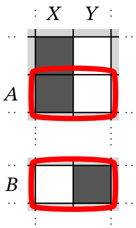
Задача 11.5. *(20 баллов)* Дана клетчатая доска 100×100. Каждая клетка доски покрашена в один из двух цветов: белый или чёрный. Назовём раскраску доски *уравновешенной,* если в каждой строке и в каждом столбце 50 белых и 50 чёрных клеток. За одну операцию разрешается выбрать две строки и два столбца так, чтобы из 4 клеток на их пересечении две были чёрными, а две — белыми, и перекрасить каждую из этих 4 клеток в противоположный цвет. Докажите, что из любой уравновешенной раскраски можно получить любую другую уравновешенную раскраску с помощью указанных операций.

Решение. Докажем, что из любой уравновешенной доски можно получить доску, раскрашенную в шахматную раскраску, причём на каждом шаге доска будет оставаться уравновешенной. Из этого будет следовать, что из любой уравновешенной доски можно получить любую другую, так как операция обратима.

Будем получать шахматную раскраску следующим образом. Разобьём столбцы на пары подряд идущих. Выберем самую левую пару столбцов и в этой паре столбцов по очереди будем приводить строки (состоящие из двух клеток) к шахматной раскраске. После того как закончим с первой парой столбцов, перейдём ко второй и так далее.

Объясним, как делать следующий шаг внутри одной пары столбцов X и Y. Пусть в следующей строке A сейчас находятся чёрная и белая клетка, но в неправильном порядке. Например, слева стоит чёрная клетка, а справа белая, а должно быть наоборот. Заметим, что во всех строках выше A в первом столбце суммарно чёрных клеток не меньше, чем во втором, так как они уже покрашены шахматным образом. Значит, в какой-то строке B ниже A должна быть ситуация, когда в левом столбце чёрных клеток меньше, чем в правом, т. е. должна быть строка белая-чёрная (это следует из того, что суммарно в первом столбце столько же чёрных клеток, сколько и во втором). Произведём операцию со строками A и B и текущими столбцами (рис. 2a).

Пусть теперь у нас в строке A стоят две одинаковые клетки, например чёрные. Тогда в какой-то строке B должны оказаться две белые клетки (иначе суммарно чёрных клеток в этих двух столбцах будет слишком много). Понятно, что эта строка расположена ниже



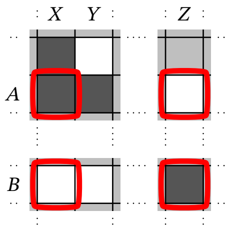


Рис. 2: к решению задачи 11.5.

текущей, т. к. выше неё все строки разноцветные. Теперь заметим, что если посмотреть на эту пару строк во всей таблице, то должен быть столбец Z правее X и Y, в котором в первой строке белая клетка, а во второй — чёрная. Тут мы пользуемся тем, что левее наших столбцов в этих строках поровну чёрных и белых клеток. Теперь осталось лишь выбрать один из столбцов X или Y (в котором неправильный цвет в строке A) и столбец Z, а также строки A и B и произвести операцию с ними (рис. 2b).

Легко видеть, что на каждом шаге уравновешенность доски сохраняется. А так как мы всегда можем сделать шаг в нашем алгоритме, то в конце получится шахматная раскраска. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Приведено любое полное решение задачи.

10 б. Описан метод получения первого столбца какой-то конкретной раскраски. Про последующие столбцы делается верное, но не обоснованное утверждение, что они заполняются аналогично.

В отсутствие указанных выше продвижений суммируются следующие критерии:

+2 б. Доказано, что если в столбце есть пара белая-чёрная клетки, то в соответствующих строках найдётся столбец, в котором находится пара чёрная-белая клетки (именно в таком порядке).

+1 б. Есть идея получить какую-то конкретную раскраску (например, шахматную), которую можно получить, а из неё любую.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Доказано, что можно получить какую-то другую уравновешенную раскраску, а не любую уравновешенную раскраску.

0 б. Предложенный алгоритм нарушает уравновешенность, но существенно использует её.

Задача 11.6. *(20 баллов)* Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами таковы, что в совокупности они имеют 4 различных действительных корня, а также каждый из многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ имеет 4 различных действительных корня. Какое наименьшее количество различных действительных чисел может быть среди корней многочленов $P(x)$, $Q(x)$, $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$?

Ответ: 6.

Решение. Заметим, что если среди корней многочлена $P(Q(x))$ есть корень $Q(x)$, скажем, число x_0, то $P(Q(x_0)) = P(0) = 0$, откуда 0 является корнем $P(x)$. Аналогично если среди корней $Q(P(x))$ есть корень многочлена $P(x)$, то 0 является корнем $Q(x)$. Но одновременно $P(x)$ и $Q(x)$ не могут иметь корень 0, т. к. иначе в совокупности у них было бы менее 4 корней.

Отсюда можно получить оценку общего числа различных корней. Если их не больше 5, то у $P(Q(x))$ и $Q(x)$ есть общий корень, а также у $Q(P(x))$ и $P(x)$ есть общий корень, чего не может быть по вышесказанному.

Теперь построим пример, когда различных корней ровно 6. Пусть $P(x) = \frac{1}{2}x(x-3)$, $Q(x) = -\frac{3}{2}(x+1)(x-2)$. Тогда у $P(x)$ корнями будут числа 0 и 3; у $Q(x)$ корнями будут числа -1 и 2; у $P(Q(x))$ корнями будут числа -1, 0, 1, 2; у $Q(P(x))$ корнями будут числа -1, 1, 2, 4. Итого корни всех многочленов в совокупности — целые числа от -1 до 4. $\square$

Замечание. Существуют и другие примеры, когда различных корней ровно 6; во всех примерах один из трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ имеет корень 0. Например, пара трёхчленов $P(x) = x(x-3)$ и $Q(x) = -\frac{3}{4}(x+1)(x-4)$ тоже подходит.

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются.

+6 б. *Оценка* — доказано, что менее 6 различных чисел среди корней рассматриваемых многочленов быть не может.

В отсутствие этого доказательства оценивается следующее продвижение:

+3 б. Замечено, что если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(x)$ имеют общий корень, то многочлен $P(x)$ имеет корень 0.

+14 б. *Пример* — указаны подходящие квадратные трёхчлены $P(x)$, и $Q(x)$ и показано, что среди корней всех четырёх рассматриваемых многочленов ровно 6 различных чисел (либо иным способом доказано, что такие трёхчлены существуют).

В отсутствие такого примера с обоснованием используется наибольший из следующих критериев:

+10 б. Верный пример квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$.

+12 б. Верный пример квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$, и в работе также есть верная оценка. (Таким образом, за решение с верной оценкой и верной парой $P(x)$ и $Q(x)$ без доказательства, что они подходят, ставится в сумме 18 б.)

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

0 б. Верный пример с 7 и более корнями.