Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 8 класс. Решения задач

весна 2023 г.

8 класс

Задача 8.1. *(15 баллов)* В клетчатом квадрате 5×5 каждую клетку покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Справа от каждой строки записали суммарное количество синих и красных клеток в этой строчке, а под каждым столбцом записали суммарное количество синих и зелёных клеток в этом столбце.

Справа от таблицы оказались числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке. Могли ли и под таблицей оказаться числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке?

Ответ: да.

Решение. Подойдёт, например, следующая раскраска:

с	к	к	к	к	5
з	с	к	к	к	4
з	з	с	к	к	3
з	з	з	с	к	2
з	з	з	з	с	1
5	4	3	2	1	

□

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведён верный пример.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 8.2. *(15 баллов)* Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 12, \\ x_1 + x_3 \geqslant 13, \\ x_1 + x_4 \geqslant 14, \\ x_3 + x_4 \geqslant 22, \\ x_2 + x_3 \geqslant 23, \\ x_2 + x_4 \geqslant 24. \end{cases}$$

Какое наименьшее значение может принимать сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

Ответ: 37.

Решение. Сложив второе равенство с последним, получим $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 37$.

Также отметим, что значение выражения $x_1+x_2+x_3+x_4$ может быть равно 37, например, при $x_1 = 1, x_2 = 11, x_3 = 12, x_4 = 13$. Легко проверить, что такие числа удовлетворяют всем условиям задачи. $\square$

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+7 б. *Оценка* — доказано, что рассматриваемая сумма не меньше 37.

+8 б. *Пример* — приведены числа, при которых сумма равна 37 (либо иным способом доказано, что такие числа существуют).

Задача 8.3. *(15 баллов)* За один ход можно выбрать натуральное число x и вычеркнуть все натуральные числа y такие, что $|x-y|$ — натуральное составное число. При этом в качестве x можно выбирать уже вычеркнутые числа.

Какое наименьшее количество ходов понадобится, чтобы вычеркнуть из натурального ряда все числа?

Ответ: 2.

Решение. Во-первых, заметим, что одного хода не хватит, так как если мы выберем некоторое натуральное число x, то число $y = x$ окажется невычеркнутым. Докажем, что двух ходов хватит.

Будем искать два подходящих числа x_1 и x_2 разной чётности. Тогда одна из разностей $|y-x_1|$ или $|y-x_2|$ будет чётной. Значит, она будет составной — кроме случаев, когда она окажется равной 2 или 0. Эти случаи нужно разобрать отдельно. При $y = x_1 - 2$, $y = x_1$ и $y = x_1+2$ разность $|y-x_2|$ должна оказаться составным числом; а при $y = x_2-2$, $y = x_2$ и $y = x_2 + 2$, наоборот, разность $|y - x_2|$ должна оказаться составным числом.

В любом случае, достаточно, чтобы разности $|x_1-x_2-2|$, $|x_1-x_2|$ и $|x_1-x_2+2|$ были нечётными составными числами. Так как выражения под модулями не могут быть разных знаков (иначе один из них окажется равным 1), то это должны быть три последовательных составных нечётных числа.

Теперь достаточно найти три последовательных составных нечётных числа $a-2$, a, $a+2$ (или даже лишь доказать, что такие существуют). Тогда можно выбрать, например, $x_1 = a + 1$ и $x_2 = 1$ и получить требуемое.

Доказать, что три последовательных нечётных составных числа существуют, можно разными способами. Приведём некоторые из них.

Способ 1. Рассмотрим последовательные нечётные числа $7!+3$, $7!+5$ и $7!+7$. Они делятся соответственно на простые числа 3, 5 и 7, но не равны им, то есть являются составными.

Способ 2. Если предположить, что $a - 2$ делится на 3, a делится на 5, а $a + 2$ делится на 7, то число a должно давать остатки 2, 0 и 5 от деления на 3, 5 и 7 соответственно, а также остаток 1 от деления на 2. По китайской теореме об остатках таких a бесконечно много, и они образуют арифметическую прогрессию с разностью $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Первое такое число — это, очевидно, $a = 5$, но оно нам не подходит; а следующее $a = 215$ подходит и даёт тройку составных 213, 215, 217.

Способ 3. Можно перебирать нечётные числа и найти подходящую тройку. Наименьшей такой тройкой является 91, 93, 95, что соответствует $x_1 = 1$ и $x_2 = 94$. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

0 б. Доказано, что одного хода не хватит.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 8.4. *(15 баллов)* В классе учится поровну мальчиков и девочек. Назовём непустую группу мальчиков *популярной,* если каждая девочка в классе дружит хотя бы с одним мальчиком из этой группы (все дружбы взаимны). Оказалось, что в классе ровно 63 популярные группы. Докажите, что каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой.

Решение. Предположим, существует мальчик x, который не дружит ни с одной девочкой. Обозначим через M множество всех остальных мальчиков класса. Заметим, что группа мальчиков $G \subset M$ является популярной тогда и только тогда, когда группа мальчиков $G \cup \{x\}$ является популярной. Таким образом, все популярные группы разбиваются на пары, в каждой из которых группы различаются только присутствием x, и их количество чётно. Но по условию популярных групп 63 — нечётное количество, противоречие. Следовательно, каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. □

Замечание. Описанная в условии задачи конструкция существует. Например, класс, в котором учится 6 мальчиков и 6 девочек, и каждая девочка дружит с каждым мальчиком, удовлетворяет условиям задачи.

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

12 б. Разбиение на пары построено не вполне корректно (например, в предположении, что мальчик, который не дружит ни с одной девочкой, существует, каждой популярной группе, которая его содержит, сопоставлена группа, которая его не содержит; но обратное сопоставление не указано).

5 б. Присутствует идея разбивать группы мальчиков на пары, но она не применяется именно к популярным группам.

Задача 8.5. *(20 баллов)* Треугольник ABC таков, что $BC < AC < AB$. Точка M — середина стороны AC. На стороне AB нашлась точка K такая, что $CK = BC$ и $BK = AC$. Докажите, что $\angle BAC = 2\angle ABM$.

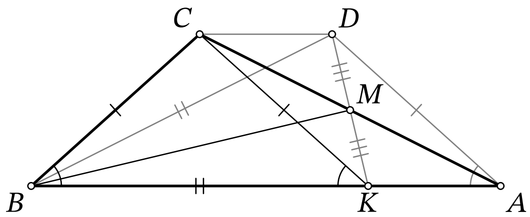

Рис. 1: к решению задачи 8.5.

Решение. Продлим отрезок KM за точку M на его длину и отметим точку D (рис. 1). В четырёхугольнике $AKCD$ диагонали пересекаются в своих серединах, поэтому он параллелограмм. Получаем $AD = CK$ и $\angle BAD = \angle BKC$; а используя равнобедренность треугольника BCK, находим $AD = BC$ и $\angle BAD = \angle CBK$. Значит, треугольники BAD и ABC равны по двум сторонам и углу $\angle BAD = \angle ABC$ между ними, то есть $BD = AC$ и $\angle ABD = \angle BAC$.

Осталось доказать, что $\angle ABD = 2\angle ABM$, то есть что BM — биссектриса угла ABD. Мы уже знаем, что BM — медиана в треугольнике BDK, а из $BD = AC = BK$ получаем, что этот треугольник равнобедренный, откуда и следует требуемое. □

Критерии

20 б. Любое полное решение задачи.

Задача 8.6. *(20 баллов)* На столе лежит 55 кучек конфет. В одной кучке лежит 1 конфета, в другой — две, в третьей — 3, …, в последней — 55. Петя и Вася играют в следующую игру, делая ходы по очереди; начинает Петя. За один ход игрок берёт одну конфету из любой кучки. Если игрок забрал из кучки последнюю конфету, то он её съедает, а иначе выбрасывает. Игра продолжается до тех пор, пока все конфеты из кучек не будут съедены или выброшены. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно съесть Петя?

Ответ: 1.

Решение. Понятно, что Петя может съесть 1 конфету, например, если самым первым ходом заберёт конфету из кучки с 1 конфетой.

Докажем, что Вася может помешать Пете съесть больше 1 конфеты. Для этого Вася будет действовать следующим образом. Если в какой-то кучке осталась ровно 1 конфета, он заберёт её и съест. Если же кучек с 1 конфетой нет, он будет брать конфету из любой кучки, в которой более 2 конфет.

Для начала поймём, почему Вася всегда сможет сделать ход по такой стратегии. Предположим, что в какой-то момент Вася не может сделать ход, то есть в каждой кучке не больше 2 конфет, при этом нет кучек с 1 конфетой. Тогда в каждой кучке ровно 2 конфеты, и перед ходом Васи осталось чётное количество конфет. С другой стороны, изначально на столе конфет было $1 + 2 + \ldots + 55 = \frac{55 \cdot 56}{2} = 1540$, т. е. чётное количество. Значит, после хода Пети должно оставаться нечётное количество конфет, а после хода Васи — чётное количество, противоречие.

Теперь докажем, что при такой стратегии Васи Петя не сможет съесть больше 1 конфеты. Заметим, что если после какого-то хода Пети нет кучек из 1 конфеты, то их больше никогда и не будет. Действительно, кучки, из которых берёт конфеты Вася, после его хода не могут состоять только из 1 конфеты, а все кучки из 1 конфеты, которые оставляет Петя, Вася сразу же съедает следующим ходом.

Таким образом, если Петя на первом ходу съест кучку из 1 конфеты, больше он конфет никогда не съест. Если же он не будет этого делать, её следующим ходом съест Вася, а Петя успеет за свой первый ход сделать не более одной новой кучки из 1 конфеты. Если она всё-таки появится (из кучки с 2 конфетами), и Петя не съест её на своём втором ходу, то он не съест вообще ничего, так как новой кучки из 1 конфеты на втором ходу он образовать не сможет. А если съест, то, как и ранее, больше ничего съесть не сможет.

Итак, у Васи есть стратегия, позволяющая не дать Пете съесть более 1 конфеты. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

- 20 б. Приведена верная стратегия Васи с объяснением.
- 18 б. Задача верно решена в необоснованном предположении, что Петя на первом ходу съест 1 конфету из кучки с 1 конфетой.
- 10 б. Приведена верная стратегия Васи без верного объяснения.
- 5 б. Задача решена в предположении, что ни один из игроков не трогает кучки с 2 конфетами, если есть хотя бы одна кучка другого размера.
- 0 б. Приведён только ответ.