Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 9 класс. Решения задач

весна 2023 г.

9 класс

Задача 9.1. *(15 баллов)* Артём, Боря, Вадим и Гриша вернулись из леса, в котором они собирали грибы. Если бы Артём собрал в 2 раза меньше, а Боря в 2 раза больше, то у них в сумме было бы столько же, сколько у Вадима и Гриши вместе. А если бы Вадим собрал в 2 раза меньше, а Гриша в 2 раза больше, то у них в сумме было бы столько же, сколько у Артёма и Бори вместе. Докажите, что Вадим собрал грибов в 2 раза больше, чем Боря, а Артём собрал грибов в 2 раза больше, чем Гриша.

Решение. Пусть Артём, Боря, Вадим, Гриша собрали a, b, v, g грибов соответственно. Из условия следует, что $\frac{a}{2} + 2b = v + g$ и $a + b = \frac{v}{2} + 2g$. Если из первого равенства, умноженного на 2, вычесть второе, получится $3b = \frac{3}{2}v$, откуда $v = 2b$. Тогда из второго равенства следует, что $a = 2g$. Что и требовалось доказать. □

Критерии

15 б. Любое полное решение задачи.

Задача 9.2. *(15 баллов)* Существует ли 1000-значное натуральное число, состоящее из ненулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим произвольное число A, заканчивающееся на 31253125. Заметим, что оно делится на $3125 = 5^5$, так как число $x = 31253125 = 3125 \cdot 10001$, очевидно, делится на 3125, а оставшееся $A - x$ заканчивается на восемь нулей, т. е. тоже делится на 5^5.

Теперь сделаем так, чтобы сумма цифр числа A была равна в точности 3125. Для этого достаточно, чтобы в числе, помимо последних 8 цифр, было 127 цифр 4 и 865 цифр 3. □

Замечание. Существуют и другие подходящие примеры.

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведён верный пример с обоснованием того, что он подходит (или иным образом доказано, что такое число существует).

0 б. Приведён неверный пример.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 9.3. *(15 баллов)* В кафе цены за обед определяются в рублях согласно диаграмме на рис. 1.

Например, только за салат надо заплатить 200 рублей, а за суп + второе — 350 рублей.

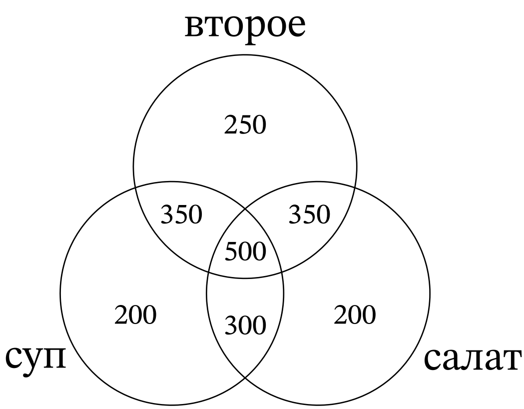

Рис. 1: к условию задачи 9.3

В это кафе пришла группа туристов, которым в сумме требуется 50 вторых блюд, 30 салатов и 15 супов. За какую наименьшую плату можно накормить группу?

Ответ: 17000 рублей.

Решение. Во-первых, отметим, что покупать лишние блюда (которые не будут съедены) в любом случае бессмысленно: если, например, остался лишний суп, то из набора, в который входил этот суп, можно было бы его исключить и заплатить меньше.

Теперь заметим, что вторых требуется больше, чем суммарно супов и салатов. Это означает, что нам обязательно придётся покупать некоторые вторые по отдельности (наборов, в которые входят супы или салаты, не больше 45).

Предположим, что мы взяли хотя бы один набор суп + салат. Но этот набор и отдельное второе (которое точно присутствует) можно было бы заменить на набор из всех трёх блюд, сэкономив на этом $300 + 250 - 500 = 50$ рублей.

Предположим, что мы взяли хотя бы один набор из всех трёх блюд. Но тогда его и отдельное второе можно заменить на наборы второе + суп и второе + салат, сэкономив на этом $250 + 500 - 350 - 350 = 50$ рублей.

Кроме того, отдельные супы или салаты можно совмещать с отдельными вторыми и экономить на этом $200 + 250 - 350 = 100$ рублей.

Таким образом, в оптимальном способе выбора могут встречаться только наборы суп + второе, салат + второе и просто второе. Отсюда однозначно восстанавливается, что наборов первого типа должно быть 15, второго типа — 30, а третьего — 5. Их общая стоимость составляет $350 \cdot 15 + 350 \cdot 30 + 250 \cdot 5 = 17\,000$ рублей. □

Другое решение. Заметим, что выгода при покупке любого набора из двух блюд составляет 100 рублей (по сравнению с покупкой этих блюд по отдельности). Можно считать, что каждое блюдо, купленное в «двойном» наборе, покупается со скидкой 50 рублей. Заметим также, что выгода при покупке набора из трех блюд составляет 150 рублей. Можно считать, что каждое блюдо, купленное в «тройном» наборе, также покупается со скидкой 50 рублей.

Итак, можно считать, что каждое блюдо, купленное в наборе, на 50 рублей дешевле, чем то же блюдо, купленное отдельно. Поэтому суммарная плата равна

$$S = 250 \cdot 50 + 200 \cdot 30 + 200 \cdot 15 - 50k,$$

где k — общее число блюд, попавших в наборы (здесь мы, как и в первом решении, пользуемся тем, что лишних блюд нет).

Заметим, что общее число блюд $50 + 30 + 15 = 95$, и хотя бы $50 - 30 - 15 = 5$ вторых блюд придется купить отдельно. Поэтому $k \leqslant 95 - 5 = 90$ и

$$S = 21500 - 50k \geqslant 21500 - 50 \cdot 90 = 17000.$$

Оценка достигается при покупке 15 наборов «суп + второе», 30 наборов «салат + второе» и 5 вторых блюд отдельно. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+10 б. *Оценка* — доказано, что общая стоимость не может оказаться меньше 17 000 рублей.

В отсутствие такого доказательства используется наибольший подходящий критерий:

- +7 б. В решении доказано, что оптимальном примере нет тройных обедов, но доказательство оценки не доведено (например, не доказано, что нет пары суп+салат).
- +5 б. Замечено, что если блюдо идет в (любом) наборе, то на него скидка 50 рублей.
- +2 б. Рассматривается функция «выгоды» в зависимости от количества тройных обедов (в предположении, что все наборы содержат второе). Замечено, но не доказано, что эта функция (линейно) убывает.
- +2 б. В решении доказано, что в оптимальном примере тройных обедов не более одного.

+5 б. *Пример* — продемонстрировано, что есть ситуация, в которой стоимость достигает 17 000 рублей, и эта величина верно вычислена.

В отсутствие такого примера используется наибольший подходящий критерий:

- +4 б. Решение содержит описание верного примера, но ответ посчитан неправильно или не посчитан.
- +2 б. Приведен верный ответ.

Задача 9.4. *(15 баллов)* Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На сторонах AB и BC нашлись точки N и M соответственно такие, что $\angle BAC = \angle NOA$ и $\angle BCA = \angle MOC$. Точка K — центр описанной окружности треугольника MBN. Докажите, что $AK = CK$.

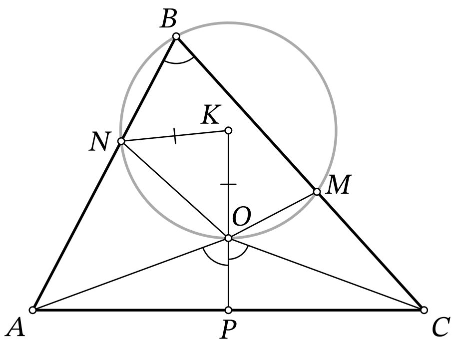

Рис. 2: к решению задачи 9.4.

Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$; имеем $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Так как O является центром описанной окружности треугольника ABC, то $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 2\gamma$, $\angle AOC = 2\beta$, $\angle OBA = \angle OAB = 90^\circ - \gamma$, $\angle OAC = \angle OCA = 90^\circ - \beta$.

Из условия следует, что $\angle MON = 360^\circ - \alpha - \gamma - 2\beta = 180^\circ - \beta$. Тогда четырёхугольник $ONBM$ является вписанным, поскольку $\angle MBN + \angle MON = 180^\circ$. Значит, точка K является центром его описанной окружности (рис. 2).

Получаем, что $\angle OKN = 2\angle OBN = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma$. Тогда $\angle KON = \angle KNO = \gamma$.

Пусть прямая KO пересекает прямую AC в точке P. Тогда

$$\angle AOP = 180^\circ - \angle AON - \angle KON = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta.$$

Следовательно, прямая OP в равнобедренном треугольнике AOC является биссектрисой угла AOC, поэтому она также является и серединным перпендикуляром к отрезку AC. Точка K лежит на этой прямой, поэтому $AK = CK$. $\square$

Другое решение. Проведём луч BO до пересечения со стороной AC в точке D (рис. 3). Заметим, что $\angle BAO = \angle ABO$ из равнобедренности треугольника ABO. Тогда, так как $\angle BAC = \angle NOA$ по условию, то треугольники ANO и BDA подобны по двум углам. Имеем $AB : BD = OA : AN$, откуда $AB \cdot AN = OA \cdot BD$.

Аналогично имеем $CB \cdot CM = OC \cdot BD$. Но так как $OA = OC$, получаем $AB \cdot AN = CB \cdot CM$.

Этого равенства достаточно, чтобы установить требуемое. Действительно, произведение $AB \cdot AN$ отрезков секущей равно квадрату длины отрезка касательной, проведённой из точки A к окружности, описанной около BMN. Аналогично той же величине оказывается

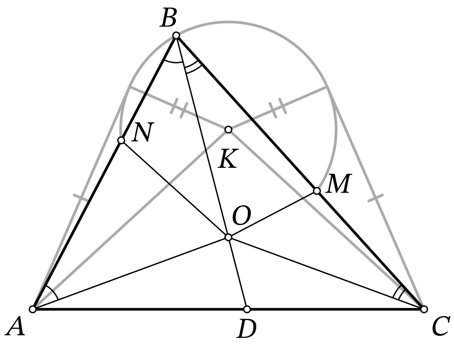

Рис. 3: к решению задачи 9.4.

равен квадрат отрезка касательной, проведённой из точки C. Из равенства отрезков касательных следует и равенство расстояний от точек A и C до центра окружности. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Доказана вписанность четырёхугольника $ONBM$.

1 б. Замечена, но не доказана вписанность четырехугольника $ONBM$.

1 б. Проделаны вычисления углов, из которых в одно действие следует вписанность четырехугольника $ONBM$, но сам этот вывод не получен.

Задача 9.5. *(20 баллов)* Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a+b=\frac{9}{c-d}$ и $c+d= =\frac{25}{a-b}$. Какое наименьшее значение может принимать величина $a^2+b^2+c^2+d^2$?

Ответ: 34.

Решение. Если данные равенства домножить на знаменатели соответствующих дробей и сложить, мы получим $2(ac-bd)=34$. Докажем, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 2(ac-bd)$. Это следует из $a^2+c^2 \geqslant 2ac$ (эквивалентно $(a-c)^2 \geqslant 0$) и $b^2+d^2 \geqslant -2bd$ (эквивалентно $(b+d)^2 \geqslant 0$). Значит, $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 34$.

Равенство достигается, если все указанные выше неравенства обращаются в равенства, то есть при $a=c$ и $b=-d$. Подставив эти соотношения в равенства, данные в условии, нетрудно найти подходящие значения, например $a=4$, $b=-1$, $c=4$, $d=1$. $\square$

Другое решение. Обозначим $a+b$ через x, а $a-b$ — через y. Получаем $a=\frac{1}{2}(x+y)$ и $b=$

$= \frac{1}{2}(x-y)$, что даёт

$$a^2+b^2=\frac{(x+y)^2}{4}+\frac{(x-y)^2}{4}=\frac{x^2+y^2}{2}.$$

С другой стороны, из условия имеем $c-d=\frac{9}{x}$ и $c+d=\frac{25}{y}$, откуда $c=\frac{1}{2}(\frac{9}{x}+\frac{25}{y})$ и $d=\frac{1}{2}(\frac{9}{x}-\frac{25}{y})$. Аналогично получаем

$$c^2+d^2=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{x}+\frac{25}{y}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{9}{x}-\frac{25}{y}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{9^2}{x^2}+\frac{25^2}{y^2}\right).$$

Складывая, имеем

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{9^2}{x^2}+y^2+\frac{25^2}{y^2}\right).$$

Заметив, что $x^2+9^2/x^2 \geqslant 2\cdot 9$ (что следует из $(x-9/x)^2 \geqslant 0$) и аналогично $y^2+25^2/y^2 \geqslant 2\cdot 25$, получаем

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant \frac{1}{2}(2\cdot 9+2\cdot 25)=9+25=34\,.$$

Равенство может достигаться, только если все неравенства обращаются в равенства. Из $x-9/x=0$ следует $x=\pm 3$, а из $y-25/y=0$ следует $y=\pm 5$, откуда нетрудно получить подходящие примеры значений исходных переменных. □

Замечание. Из приведенных решений можно понять, что выражение принимает значение 34 только при четырех наборах (a,b,c,d):

$$(4,-1,4,1);\quad (-1,4,-1,-4);\quad (1,-4,1,4);\quad (-4,1,-4,-1).$$

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+17 б. *Оценка* — доказано, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 34$.

В отсутствие полного доказательства оценки используется наибольший подходящий критерий:

- +3 б. В работе присутствует равенство $2(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b)^2+(a-b)^2+$ $+(c+d)^2+(c-d)^2$.
- +3 б. В работе присутствует равенство $ac-bd=17$ или $2ac-2bd=34$.
- +0 б. В работе присутствует равенство $ad-bc=8$ или $2ad-2bc=16$.
- +0 б. Задача решается в предположении, что числа a, b, c, d целые.

+3 б. *Пример* — приведены подходящие числа a, b, c, d, для которых $a^2+b^2+c^2+d^2=34$ (или доказано, что такие существуют).

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 9.6. *(20 баллов)* Было n внешне одинаковых монет, которые весят $x_1, x_2, \ldots, x_n$ граммов (веса монет — попарно различные положительные действительные числа), а также невесомые наклейки с числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ночью лаборант взвесил монеты и промаркировал их наклейками. Требуется с помощью чашечных весов проверить, что он ничего не перепутал. Например, если $n = 6$, $x_1 = 1, \ldots, x_6 = 6$, то это возможно сделать за 2 взвешивания, проверив, что

$$1 + 2 + 3 = 6,$$
$$1 + 6 < 3 + 5.$$

Существует ли при $n = 8$ такой набор весов $x_1, x_2, \ldots, x_8$, правильность маркировки которого возможно проверить за 2 взвешивания?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим веса 10, 20, 25, 30, 35, 201, 203, 207 (здесь и далее веса будут измеряться в граммах). Сделаем две проверки:

$$10 + 20 + 30 = 25 + 35,$$
$$10 + 25 + 201 < 30 + 207.$$

Сначала рассмотрим первое взвешивание. Докажем, что если некоторые три монеты уравновесили некоторые две монеты, то это обязательно 10, 20, 30 на одной чаше и 25, 35 на другой.

Будем называть монеты 10, 20, 25, 30, 35 *маленькими,* а монеты 201, 203, 207 — *большими.*

Если среди пяти монет, участвующих в первом взвешивании, есть большие, то на каждой чаше такая монета должна быть ровно одна (иначе чаша, где таких монет больше, перевесит). При этом веса всех маленьких монет делятся на 5, а веса больших монет дают разные остатки при делении на 5. Тогда суммарные веса на чашах дают разные остатки при делении на 5, что невозможно в случае равенства.

Значит, все эти пять монет — маленькие. Тогда обе чаши весят по $\frac{1}{2}(10+20+25+30+35) = 60$. Легко понять, что сумма весов двух монет может быть равна 60, только если эти две монеты весят 25 и 35. Тогда три другие монеты весят 10, 20, 30.

Следовательно, если первое взвешивание показало равенство, то 10, 20, 30 находятся на чаше с 3 монетами (эту группу назовём A), а 25, 35 — на чаше с двумя монетами (эту группу назовём B). При этом монеты 201, 203, 207 (эту группу назовём C) в первом взвешивании не участвуют.

Рассмотрим второе взвешивание. На одну чашу взяли по одной монете из каждой из трёх групп A, B, C, минимальная сумма весов таких монет $10 + 25 + 201 = 236$. На вторую чашу взяли по одной монете из групп A и C, максимальная сумма весов таких монет $30 + 207 = 237$. В силу того, что 237 больше 236 всего на 1, при взятии любых других монет неравенство во втором взвешивании выполняться не будет. Значит, на одной чаше лежат монеты 10, 25, 201, а на другой — 30, 207.

Итак, при каждом взвешивании мы однозначно определили набор монет на каждой чаше. При этом для всех 8 монет различны пары групп, куда они попали при первом и втором взвешиваниях (либо на чашу с 3 монетами, либо на чашу с 2 монетами, либо не взвешивалась). Следовательно, вес каждой монеты определяется однозначно. □

Замечание. В любом верном алгоритме одно взвешивание должно устанавливать равенство весов двух монет на одной чаше с тремя монетами на другой, а другое взвешивание должно устанавливать, что две монеты на одной чаше тяжелее трёх монет на другой. Это можно понять из следующих соображений.

- Монеты, входящие при одном взвешивании в одну из трёх групп (на первой чаше, на второй и не взвешиваемые), обязаны оказаться в разных группах при втором взвешивании. (Действительно, если две монеты оказались в одних и тех же группах при обоих взвешиваниях, лаборант мог их перепутать и мы бы ничего не заметили.)
- Из предыдущего пункта следует, что никакое взвешивание не может создавать группу из 4 монет или более. Это означает, что в каждом взвешивании на чашах либо по 3 монеты, либо 3 и 2.
- Также из первого пункта следует, что монеты можно расположить в таблице 3×3, по строкам которой располагаются группы первого взвешивания, а по столбцам — группы второго; ровно одна из клеток останется без монеты.

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1		c_3

- Не могут оба взвешивания иметь одинаковый формат и исход. (Например, не может быть, чтобы в обоих взвешиваниях 2 монеты на одной чаше перевешивали 3 монеты на другой.) Действительно, в этом случае если в таблице, приведённой выше, упорядочить строки и столбцы одинаковым образом (например, в порядке лёгкое/тяжёлое/невзвешенное), то пустая клетка расположится на главной диагонали; тогда лаборант мог так перепутать наклейки, чтобы монеты отразились относительно этой диагонали, и заметить этого мы бы не смогли.
- Не может быть взвешивания, в котором на обеих чашах по три монеты, и между ними установилось равновесие. Например, пусть первое взвешивание так устроено; его чаши сопоставим первой и второй строкам нашей таблицы. Тогда лаборант мог так перепутать наклейки, что первая и вторая строка поменяются местами. На результатах наших взвешиваний это бы не отразилось, то есть мы бы такую ошибку не заметили.
- Не может быть взвешивания, в котором на обеих чашах по три монеты, и одна чаша тяжелее другой. Чтобы это доказать, предположим противное — пусть это было первое взвешивание. Лёгкую его чашу сопоставим первой строке, а тяжёлую — третьей строке; столбцы упорядочим так, чтобы группа из 2 монет от второго взвешивания оказалась в последнем столбце (независимо от самой структуры второго взвешивания).

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	
c_1	c_2	c_3

Если теперь переупорядочить числа в столбцах сверху вниз по возрастанию (оставив пустую клетку пустой), то показания весов не изменятся: состав столбцов не поменяется, а нижняя строка окажется помонетно тяжелее верхней. Но если после этого поменять местами, например, в центральном столбце две нижние монеты, то нижняя строка всё равно будет тяжелее верхней! Получается, что мы не можем однозначно установить расположение монет, то есть у лаборанта опять есть шанс нас обмануть.

- Аналогично доказывается, что не может быть взвешивания, в котором чаша с тремя монетами перевешивает чашу с двумя.

Также из аналогичных соображений нетрудно понять, что для 9 монет двумя взвешиваниями обойтись уже ни в какой ситуации не получится.

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Приведен верный пример набора масс и описание двух взвешиваний, позволяющих проверить правильность маркировки.

3 б. В работе содержится указание на то, что монеты, попавшие в одну группу при первом взвешивании, при втором взвешивании должны оказаться в разных группах.

3 б. В работе приведен пример набора масс и описание двух взвешиваний, не позволяющих проверить правильность маркировки, но монеты, оказавшиеся в одной группе при каждом из взвешиваний, при другом взвешивании попадают в разные группы.