

Время выполнения заданий — 180 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 8.1. (15 баллов) В клетчатом квадрате 5×5 каждую клетку покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Справа от каждой строки записали суммарное количество синих и красных клеток в этой строчке, а под каждым столбцом записали суммарное количество синих и зелёных клеток в этом столбце.

Справа от таблицы оказались числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке. Могли ли и под таблицей оказаться числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке?

Задача 8.2. (15 баллов) Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_3 \geq 13, \\ x_1 + x_4 \geq 14, \\ x_3 + x_4 \geq 22, \\ x_2 + x_3 \geq 23, \\ x_2 + x_4 \geq 24. \end{cases}$$

Какое наименьшее значение может принимать сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

Задача 8.3. (15 баллов) За один ход можно выбрать натуральное число x и вычеркнуть все натуральные числа y такие, что $|x - y|$ — натуральное составное число. При этом в качестве x можно выбирать уже вычеркнутые числа.

Какое наименьшее количество ходов понадобится, чтобы вычеркнуть из натурального ряда все числа?

Задача 8.4. (15 баллов) В классе учатся поровну мальчиков и девочек. Назовём непустую группу мальчиков *популярной*, если каждая девочка в классе дружит хотя бы с одним мальчиком из этой группы (все дружбы взаимны). Оказалось, что в классе ровно 63 популярные группы. Докажите, что каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой.

Задача 8.5. (20 баллов) Треугольник ABC таков, что $BC < AC < AB$. Точка M — середина стороны AC . На стороне AB нашлась точка K такая, что $CK = BC$ и $BK = AC$. Докажите, что $\angle BAC = 2\angle ABM$.

Задача 8.6. (20 баллов) На столе лежит 55 кучек конфет. В одной кучке лежит 1 конфета, в другой — две, в третьей — 3, ..., в последней — 55. Петя и Вася играют в следующую игру, делая ходы по очереди; начинает Петя. За один ход игрок берёт одну конфету из любой кучки. Если игрок забрал из кучки последнюю конфету, то он её съедает, а иначе выбрасывает. Игра продолжается до тех пор, пока все конфеты из кучек не будут съедены или выброшены. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно съесть Петя?