

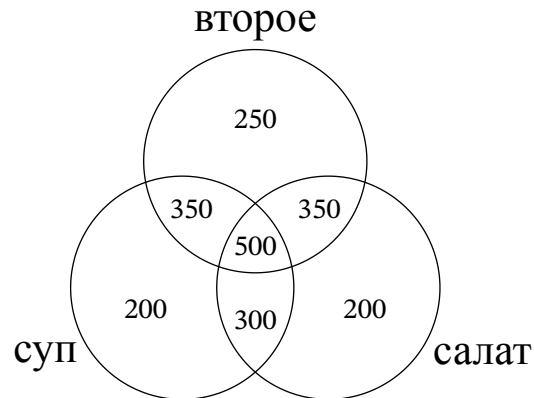
Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 9.1. (15 баллов) Артём, Боря, Вадим и Гриша вернулись из леса, в котором они собирали грибы. Если бы Артём собрал в 2 раза меньше, а Боря в 2 раза больше, то у них в сумме было бы столько же, сколько у Вадима и Гриши вместе. А если бы Вадим собрал в 2 раза меньше, а Гриша в 2 раза больше, то у них в сумме было бы столько же, сколько у Артёма и Бори вместе. Докажите, что Вадим собрал грибов в 2 раза больше, чем Боря, а Артём собрал грибов в 2 раза больше, чем Гриша.

Задача 9.2. (15 баллов) Существует ли 1000-значное натуральное число, состоящее из ненулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр?

Задача 9.3. (15 баллов) В кафе цены за обед определяются в рублях согласно следующей диаграмме:



Например, только за салат надо заплатить 200 рублей, а за суп + второе — 350 рублей.

В это кафе пришла группа туристов, которым в сумме требуется 50 вторых блюд, 30 салатов и 15 супов. За какую наименьшую плату можно накормить группу?

Задача 9.4. (15 баллов) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . На сторонах AB и BC нашлись точки N и M соответственно такие, что $\angle BAC = \angle NOA$ и $\angle BCA = \angle MOC$. Точка K — центр описанной окружности треугольника MBN . Докажите, что $AK = CK$.

Задача 9.5. (20 баллов) Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a + b = \frac{9}{c-d}$ и $c + d = \frac{25}{a-b}$. Какое наименьшее значение может принимать величина $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

Задача 9.6. (20 баллов) Было n внешне одинаковых монет, которые весят x_1, x_2, \dots, x_n граммов (веса монет — попарно различные положительные действительные числа), а также невесомые наклейки с числами x_1, x_2, \dots, x_n . Ночью лаборант взвесил монеты и промаркировал их наклейками. Требуется с помощью чашечных весов проверить, что он ничего не перепутал. Например, если $n = 6, x_1 = 1, \dots, x_6 = 6$, то это возможно сделать за 2 взвешивания, проверив, что

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

$$1 + 6 < 3 + 5.$$

Существует ли при $n = 8$ такой набор весов x_1, x_2, \dots, x_8 , правильность маркировки которого возможно проверить за 2 взвешивания?